Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)
531.104, 531.105
12. Übungsblatt für den 25.1.2018 und 29.1.2018

88. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$. *Hinweis:* Sie können zum Beispiel $(1+1)^n$ mithilfe des binomischen Lehrsatzes berechnen.

89. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die n-te Zeile des Pascalschen Dreiecks. Zeigen Sie, dass die Summe der an ungerader Stelle stehenden Zahlen gleich der Summe der an gerader Stelle stehenden Zahlen ist. Zeigen Sie also

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{i}.$$

Hinweis: $(1-1)^n = \cdots$.

90. Für $n, i \in \mathbb{N}_0$ sei $C(n,i)$ die Anzahl der i-elementigen Teilmengen von $\{1,2,\ldots,n\}$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ gilt, dass $C(n,i) = C(n,n-i)$, indem Sie eine bijektive Abbildung Ψ von der Menge V in die Menge W angeben, wobei

$$\begin{aligned} V &:= \{A \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \mid \#A = i\}, \\ W &:= \{B \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \mid \#B = n-i\}. \end{aligned}$$

Weisen Sie nach, dass Ihr angegebenes Ψ bijektiv ist!

91. Für $n, i \in \mathbb{N}_0$ sei $C(n,i)$ die Anzahl der i-elementigen Teilmengen von $\{1,2,\ldots,n\}$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ gilt, dass $C(n,i) = C(n-1,i) + C(n-1,i-1)$, indem Sie eine bijektive Abbildung Φ von der Menge X in die Menge $Y \cup Z$ angeben, wobei

$$\begin{aligned} X &:= \{A \subseteq \{1,2,\ldots,n-1,n\} \mid \#A = i\}, \\ Y &:= \{B \subseteq \{1,2,\ldots,n-1\} \mid \#B = i-1\}, \\ Z &:= \{C \subseteq \{1,2,\ldots,n-1\} \mid \#C = i\}. \end{aligned}$$

Weisen Sie nach, dass Ihr angegebenes Φ bijektiv ist!

92. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt, dass $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$. *Hinweis:* Sie können etwa mittels Induktion nach n vorgehen, oder eine Bijektion zu einer Menge konstruieren, deren Kardinalität Sie als $2^{n-1} - 1$ kennen.

93. Rechnen Sie das Inklusions- und Exklusionsprinzip für $A_1 = \{1,2,3,7,8\}$, $A_2 = \{2,4,6,8\}$ und $A_3 = \{2,5,7\}$ nach.

94. Zeigen Sie, dass das reelle Interval $[0,4]$ gleichmächtig zu $[0,2]$ ist.

95. Wir nehmen an, dass $A_1 \sim A_2$ und $B_1 \sim B_2$. Zeigen Sie, dass dann auch $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$ gilt, indem Sie eine Bijektion angeben.