Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)
531.104, 531.105
11. Übungsblatt für den 18.1.2018 und 22.1.2018

80. Sei $M = \{0, 1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Wir definieren die Relation ρ auf M durch
$$\rho := \{(a, b) \in M \times M : a \mid b\}.$$
Man zeige, dass ρ eine Ordnungsrelation auf M ist. Ist ρ linear? Gibt es ein größtes oder ein kleinstes Element bezüglich ρ?

81. Sei $N := \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{2018\}$ und $\sigma := \{(a, b) \in N \times N : a \mid b\}$. Man zeige, dass σ eine Ordnungsrelation auf N ist. Ist σ linear? Bestimmen Sie die maximalen, minimalen, größten und kleinsten Elemente von N bezüglich σ.

82. Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Mengen. Auf $\mathcal{A}$ definieren wir eine Relation $\sim$ durch
$$B \sim C :\Leftrightarrow \text{es existiert eine bijektive Abbildung von } B \text{ nach } C.$$
Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

83. Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Mengen. Auf $\mathcal{A}$ definieren wir eine Relation $\precsim$ durch
$$B \sim C :\Leftrightarrow \text{es existiert eine injektive Abbildung von } B \text{ nach } C.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $\precsim$ eine reflexive und transitive Relation ist.
   (b) Geben Sie ein Beispiel für $\mathcal{A}$ an, für das die Relation $\precsim$ antisymmetrisch ist, und eines, für das die Relation $\precsim$ nicht antisymmetrisch ist.

84. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, sei f eine bijektive Abbildung von $\underline{m}$ nach A, und sei g eine bijektive Abbildung von $\underline{n}$ nach A. Wir nehmen an, dass $A \cap B = \varnothing$. Geben Sie eine bijektive Abbildung von $\underline{m+n}$ nach $A \cup B$ an.

85. Geben Sie alle Partitionen von $\{1, 2, 3, 4\}$ an. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Tabelle der Stirling-Zahlen zweiter Art im Skriptum.

86. Die Potenzmenge von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und die Menge $\{7, 8\}^{\{1,2,3,4,5,6\}}$ haben beide 64 Elemente. Sei $A := \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ und $B := \{7, 8\}^{\{1,2,3,4,5,6\}}$. Geben Sie eine bijektive Abbildung von A nach B und eine bijektive Abbildung von B nach A an.

87. (a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass
$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$
Hinweis: Rechnen Sie die rechte Seite aus und heben Sie in beiden Summanden $(n-1)^{\underline{m-2}}$ heraus.
   (b) Erklären Sie, wie diese Rekursion zum Pascalschen Dreieck (das auch von Omar Chayyām, Yang Huo und Nicolò Tartaglia erfunden wurde) zur Berechnung der Binomialkoeffizienten führt.