Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)
531.104, 531.105
10. Übungsblatt für den 11.1.2018 und 15.1.2018

(72) Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge A, und seien $a, b \in A$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $(a, b) \in \rho$.
(b) $[a]_\rho = [b]_\rho$.
(c) $a \in [b]_\rho$.
(d) $[a]_\rho \cap [b]_\rho \neq \varnothing$.

(73) Geben Sie ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation auf $A := \{2, 3, 4, 5\}$ an. Geben Sie Ihre Relation in der Form $\rho = \{\ldots\}$ an!

(74) (a) Geben Sie die Partition $\mathcal{P}$ der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ an, die von der Äquivalenzrelation $\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$ induziert wird.
(b) Geben Sie die Äquivalenzrelation β auf $M = \{1, 2, 3, 4\}$ an, die die Partition $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$ induziert.

(75) Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $B(n)$ die Anzahl der Äquivalenzrelationen auf $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen Sie $2^{n-1} \leq B(n) \leq 2^{n^2}$.

(76) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Relation $\rho_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \mid (a - b)\}$. Zeigen Sie, dass ρ_n eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist. Bestimmen Sie die Menge $[0]_{\rho_n}$.

(77) Im folgenden Beispiel schreiben wir die Elemente des $\mathbb{R}^2$ als Spaltenvektoren, etwa in der Form $\binom{-2}{3}$. Es ist sinnvoll, sich diese Paare als Punkte in der Ebene vorzustellen. Wir definieren folgende Relation ρ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

$$\rho := \Big\{ \Big(\big(\tbinom{x_1}{x_2}, \tbinom{y_1}{y_2} \big), \big(\tbinom{u_1}{u_2}, \tbinom{v_1}{v_2} \big) \Big) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \mid \tbinom{y_1 - x_1}{y_2 - x_2} = \tbinom{v_1 - u_1}{v_2 - u_2} \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass ρ eine Äquivalenzrelation ist. Was bedeutet „äquivalent sein“ hier geometrisch?

(78) Wir definieren folgende Relation auf $Q = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

$$\sigma := \{ (\tbinom{a}{b}, \tbinom{c}{d}) \in Q \times Q \mid ad = bc \}.$$

(a) Zeigen Sie, dass σ eine Äquivalenzrelation ist.
(b) Finden Sie ein Repräsentantensystem für die Relation σ. Finden Sie jeweis die Repräsentanten r in ihrem System mit $(r, \binom{92}{-115}) \in \sigma$, $(r, \binom{150}{100}) \in \sigma$ und $(r, \binom{-8}{10}) \in \sigma$.
(c) Was bedeutet hier „äquivalent sein“? (Hinweis: Vergleichen Sie die Paare $\binom{a}{b}$ und $\binom{c}{d}$ mit den Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$).

(79) Wir definieren folgende Relation auf $\mathbb{N}_0$, $\rho := \{(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : a \mid b\}$. Man zeige: ρ ist eine Ordnungsrelation. Ist ρ linear? Gibt es ein größtes oder ein kleinstes Element bezüglich ρ?