Teil 3

Funktionen und Relationen

KAPITEL 5

Funktionen

1. Relationen

Definition 5.1. Seien A, B Mengen. Jede Teilmenge von $A \times B$ heißt auch *Relation von A nach B*.

Beispiele:

- Sei $A := \{\text{Wien}, \text{Niederösterreich}, \text{Oberösterreich}, \text{Salzburg}, \text{Tirol}, \text{Vorarlberg}, \text{Burgenland}, \text{Steiermark}, \text{Kärnten}\}$ die Menge der neun österreichischen Bundesländer, und sei $B := \{\text{Donau}, \text{Inn}, \text{Traun}\}$. Wir definieren eine Relation R durch

  $$R := \{(a, b) \in A \times B \,|\, a \text{ besitzt einen Teil des Ufers von } b\}.$$

  Wir erhalten $R = \{(\text{Wien}, \text{Donau}), (\text{Niederösterreich}, \text{Donau}), (\text{Oberösterreich}, \text{Donau}), (\text{Tirol}, \text{Inn}), (\text{Oberösterreich}, \text{Inn}), (\text{Steiermark}, \text{Traun}), (\text{Oberösterreich}, \text{Traun})\}$.
- Für $(a, b) \in R$ schreiben wir auch $a\,R\,b$. Sei nun $A := \mathbb{R}$ und $B := \mathbb{Z}$. Wir definieren eine Relation ρ durch

  $$a\,\rho\,b :\Leftrightarrow a \in [b, b+1[$$

  für $a \in A$, $b \in B$. Dann gilt zum Beispiel $(\pi, 3) \in \rho$, $(\sqrt{2}, 1) \in \rho$. Es gilt also $\rho = \{(r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,|\, n \leq r < n+1\}$.
- Sei nun $A := \mathbb{N}$ und $B := \mathbb{N}$. Wir definieren eine Relation K durch

  $$(a, b) \in K :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}_0 : a + c = b$$

  für $a \in A$, $b \in B$. Wir sehen, dass $K = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x \leq y\}$. K ist also die „kleiner-gleich“-Relation.
- Nun definieren wir eine Relation $\equiv_5$ von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ durch

  $$a \equiv_5 b :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : 5 \cdot c = b - a.$$

  Es gilt also

  $$\equiv_5 \;=\; \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, b - a \text{ ist Vielfaches von } 5\}.$$

2. Funktionen

Definition 5.2. Seien A, B Mengen, und sei R eine Relation von A nach B. R ist eine *funktionale Relation von A nach B*, wenn es für alle $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, sodass $(a, b) \in R$.

Beispiele: Seien $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{a, b, c\}$, $R := \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$. Dann ist R eine funktionale Relation von A nach B.

Sei $A := \mathbb{R}$, $B := \mathbb{R}$, $f := \{(r, \sin(r)) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Dann ist f eine funktionale Relation von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Sei $A := \mathbb{R}$, $B := \mathbb{R}$, $g := \{(\sin(r), r) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Dann ist g keine funktionale Relation von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, da es kein $y \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $(-2, y) \in \mathbb{R}$.

Sei $A := [-1, 1]$, $B := \mathbb{R}$, $h := \{(\sin(r), r) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Dann ist h keine funktionale Relation von A nach $\mathbb{R}$, da $(0, 0) \in h$ und $(0, \pi) \in h$. Somit gibt es für $a := 0$ mehr als ein $b \in \mathbb{R}$, sodass $(a, b) \in h$.

Definition 5.3. Seien A, B Mengen, und sei f eine funktionale Relation von A nach B. Für $a \in A$ bezeichnen wir mit $f(a)$ dann jenes $b \in B$, für das $(a, b) \in f$.

Funktionale Relationen von A nach B bezeichnen wir auch einfach als *Funktionen von A nach B*. Funktionen kann man auf verschiedene Arten angeben. Wir betrachten einige gebräuchliche Varianten für die Quadratfunktion q auf den ganzen Zahlen.

(1) Direkt als Menge: $q := \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Die Menge kann natürlich auch anders angegeben werden, zum Beispiel durch $q := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$.

(2) Durch eine Zuordnungsvorschrift:

$$\begin{array}{rcccl} q & : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Man liest das als „q ist eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$, die jedes x aus $\mathbb{Z}$ auf x^2 abbildet“.

(3) Durch Angabe des Funktionswerts, also etwa so: $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $q(z) := z^2$ für $z \in \mathbb{Z}$. (Lies: „q ist eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$, und $q(z)$ ist gleich z^2 für alle $z \in \mathbb{Z}$.“)

Egal, welche der drei Varianten man wählt: q ist dadurch jedesmal als die gleiche Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert. Die Schreibweise $f : A \to B$ bedeutet *f ist eine Funktion von A nach B*, also einfach *f ist eine funktionale Relation von A nach B*.

Übungsaufgaben 5.4.

(1) Welche der folgenden Relationen sind Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie jene Relationen, die Funktionen sind, auch in der Form

$$\begin{array}{rccc} \ldots : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ldots \end{array}$$

an.

(a) $f = \{(x^3, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{R})$.
(b) $g = \{((x-1)(x-2), x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{R})$.
(c) $h = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid b = \frac{a}{3}\}$.

Definition 5.5 (Einschränkung). Seien A, B Mengen, sei T eine Teilmenge von A, und sei f eine Funktion von A nach B. Mit $f|_T$ bezeichnen wir die Funktion, die durch

$$\begin{array}{rcccc} f & : & T & \longrightarrow & B \\ & & t & \longmapsto & f(t) \end{array}$$

gegeben ist. Sie heißt *Einschränkung von f auf T*.

Es gilt also $f|_T = \{(x, y) \in f \mid x \in T\} = f \cap (T \times B)$.

Definition 5.6. Seien A, B Mengen. Mit B^A bezeichnet man die Menge aller Funktionen von A nach B. Genauer:

$$B^A := \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f : A \to B\}.$$

Satz 5.7. *Seien $n, m \in \mathbb{N}$, und sei $A = \{1, \ldots, m\}$, $B := \{1, \ldots, n\}$. Dann hat B^A genau n^m Elemente.*

Beweisskizze: Um zu zählen, wieviele Funktionen f von $\{1, \ldots, m\}$ nach $\{1, \ldots, n\}$ es gibt, beobachten wir, dass wir n Möglichkeiten für $f(1)$, n Möglichkeiten für $f(2)$, …, und n Möglichkeiten für $f(m)$ haben. Insgesamt gibt es also n^m Funktionen. □

3. Definitions- und Wertebereich

Definition 5.8. Seien A, B Mengen, und sei f eine Funktion von A nach B. Dann heißt A auch der *Definitionsbereich* von f. Der *Wertebereich* von f ist die Menge $\{f(a) \mid a \in A\}$.

Den Wertebereich von f bezeichnet man auch als *Bildbereich* von f. Der Wertebereich einer Funktion von A nach B enthält also jene Elemente in B, die tatsächlich als Funktionswert auftreten. Er muss nicht gleich der ganzen Menge B sein. Wenn f eine Funktion von A nach B ist, so bezeichnen wir B auch als einen *Wertevorrat* oder eine *Zielmenge* von f.

Definition 5.9. Seien A, B Mengen, und sei f eine Funktion von A nach B. Sei $T \subseteq A$. Dann bezeichnen wir mit $f[T]$ die *Bildmenge von T unter f*, die wir mit

$$f[T] = \{f(t) \mid t \in T\}$$

definieren.

Wenn keine Verwechslungen möglich sind, so schreibt man auch $f(T)$ anstelle von $f[T]$. Für die Sinusfunktion sin von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist der Wertebereich also das Intervall $[-1, 1]$. Außerdem gilt $\sin[\{n \cdot \frac{\pi}{4} \mid n \in \mathbb{N}\}] = \{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$.

Satz 5.10. *Seien A, B Mengen, und sei f eine Funktion von A nach B. Seien $C, D \subseteq A$. Dann gilt*

(1) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$,
(2) $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.

Übungsaufgaben 5.11.

(1) Beweisen Sie Satz 5.10.
(2) Finden Sie ein Beispiel, für das $f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D)$ ist.

Definition 5.12. Seien A, B Mengen, und sei f eine Funktion von A nach B.

(1) Die Funktion f ist *injektiv*, wenn
$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$
gilt.
(2) Die Funktion f ist *surjektiv auf* B, wenn es für alle $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, sodass $f(a) = b$.
(3) Die Funktion f ist *bijektiv von A nach B*, wenn sie injektiv und surjektiv auf B ist.

Die Funktion f ist also injektiv, wenn es kein $x, y \in A$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$ gibt. Wenn für eine Funktion $f : A \to B$ klar ist, welches B gemeint ist, sagt man oft einfach „f ist surjektiv“ anstelle von „f ist surjektiv auf B“. Im folgenden arbeiten wir darauf hin, die Wirkung einer Funktion wieder rückgängig zu machen, also, wenn möglich, aus dem Bild $f(x)$ einer Funktion das Argument x zu rekonstruieren.

Satz 5.13. *Seien A, B Mengen, und sei f eine Funktion von A nach B. Sei*
$$g := \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}.$$
Dann sind äquivalent:

(1) *g ist eine Funktion von B nach A.*
(2) *f ist eine bijektive Funktion von A nach B.*

Beweis: (2)⇒(1): Sei $b \in B$. Wir zeigen, dass es genau ein $a \in A$ gibt, sodass $(b, a) \in g$. Da f bijektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$, also mit $(a, b) \in f$. Dann gilt $(b, a) \in g$, und wir haben ein geeignetes $a \in A$ gefunden. Wir zeigen nun, dass es höchstens ein $a \in A$ mit $(b, a) \in g$ gibt. Seien $a_1, a_2 \in A$ so, dass $(b, a_1) \in g$ und $(b, a_2) \in g$. Dann gilt $(a_1, b) \in f$ und $(a_2, b) \in f$, also $b = f(a_1) = f(a_2)$. Da f injektiv ist, gilt $a_1 = a_2$. (1)⇒(2): Wir zeigen als erstes, dass f injektiv ist. Seien $a_1, a_2 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2)$. Also gilt $(a_1, f(a_1)) \in f$ und

$(a_2, f(a_2)) \in f$, und somit $(f(a_1), a_1) \in g$ und $(f(a_2), a_2) \in g$. Da g eine Funktion ist, muss wegen $f(a_1) = f(a_2)$ also auch $a_1 = a_2$ gelten. Somit ist f injektiv. Wir zeigen nun, dass f surjektiv ist. Sei dazu $b \in B$. Da g eine Funktion ist, gibt es ein $a \in A$ mit $(b, a) \in g$. Somit gilt $(a, b) \in f$, und folglich $f(a) = b$. Also liegt b im Wertebereich von f. Somit ist f surjektiv. □

Definition 5.14. Seien A, B Mengen, und sei f eine bijektive Funktion von A nach B. Die Funktion $g : B \to A$ mit $g = \{(b, a) \in B \times A \,|\, f(a) = b\}$ heißt *die zu f inverse Funktion* oder *Umkehrfunktion von f*, und wird mit f^{-1} abgekürzt.

Die gleiche Schreibweise, f^{-1}, verwendet man auch für etwas anderes:

Definition 5.15. Seien A, B Mengen, und sei f eine Funktion von A nach B. Sei $D \subseteq B$. Dann bezeichnet man mit $f^{-1}[D]$ (oder $f^{-1}(D)$) die Menge, die durch

$$f^{-1}[D] := \{a \in A \,|\, f(a) \in D\}$$

gegeben ist, und man nennt $f^{-1}[D]$ das *Urbild von D unter f*.

4. Familien und Folgen

Wir können es bestimmt nicht besser formulieren als P. Halmos [**Hal76**, S. 48].

> Gelegentlich wird der Wertebereich einer Funktion für wichtiger gehalten als die Funktion selbst. In einem solchen Falle werden Terminologie und Notation stark verändert. Sei zum Beispiel x eine Funktion von einer Menge I in eine Menge X. [...] Wir wollen jetzt ein Element des Definitionsbereiches I einen *Index* und I selbst die *Indexmenge* nennen; der Wertebereich der Funktion x soll *indizierte Menge* und die Funktion selbst *Familie* heißen; der Wert der Funktion an einer Stelle i, *Term* der Familie genannt, wird (anstelle von $x(i)$) nun x_i geschrieben.

Definition 5.16. Seien I, X Mengen, und sei x eine Funktion von I nach X. Wir schreiben x_i für $x(i)$. Wir definieren nun $\langle x_i \,|\, i \in I\rangle$ durch

$$\langle x_i \,|\, i \in I\rangle := \{(i, x_i) \,|\, i \in I\}.$$

Es gilt also $x = \langle x_i \,|\, i \in I\rangle$.

Für $\langle x_i \,|\, i \in I\rangle$ schreibt man auch $(x_i)_{i\in I}$. Wenn f eine Funktion von A nach B, und C eine Teilmenge von A ist, schreibt man

$$\langle f(c) \,|\, c \in C\rangle \text{ oder } (f(c))_{c\in C}$$

für die Menge $\{(c, f(c)) \,|\, c \in C\}$.

Definition 5.17. Sei A eine Menge, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, \ldots, a_n \in A$. Mit dem *n-Tupel* $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ meinen wir die Familie $\langle a_i \,|\, i \in \{1, \ldots, n\}\rangle$.

Ein n-Tupel $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ sehen wir also als eine mit der Indexmenge $\{1, \ldots, n\}$ indizierte Familie an. Das n-Tupel $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ schreiben wir auch als $(a_1, \ldots, a_n)$; dass jetzt (a, b) zwei verschiedene (aber in der Praxis sehr ähnliche) Bedeutungen haben kann, stört meist nicht.

Definition 5.18. Sei A eine Menge, und sei $n \in \mathbb{N}$. Mit A^n bezeichnen wir die Menge aller n-Tupel aus A, also

$$A^n := \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \,|\, a_1, \ldots, a_n \in A\} = \{f \,|\, f : \{1, \ldots, n\} \to A\}.$$

Definition 5.19. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine mit I indizierte Familie von Mengen. Dann ist

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} X_i &:= \{x : I \to \bigcup \{X_i \,|\, i \in I\} \;\;|\;\; \forall i \in I : x(i) \in X_i\} \\ &= \{(x_i)_{i \in I} \,|\, (x_i)_{i \in I} \text{ ist eine Familie mit } \forall i \in I : x_i \in X_i\}.\end{aligned}$$

Wenn alle X_i die gleiche Menge X sind, erhält man $\prod_{i \in I} X_i = X^I$. Die Menge der reellen Zahlenfolgen ist also zum Beispiel genau die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Jetzt können wir noch ein Axiom der Mengenlehre angeben, das nicht aus den anderen Axiomen der Mengenlehre folgt. Es hat so überraschende Konsequenzen, dass man seine Verwendung, im Unterschied zur Verwendung der anderen Axiome der Mengenlehre, manchmal explizit macht, und etwa schreibt: „unter Verwendung des Auswahlaxioms gilt“.

Axiom 5.20 (Auswahlaxiom). *Sei I eine Menge, und sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Wir nehmen an, dass für alle $i \in I$ die Menge X_i nicht leer ist. Dann ist auch $\prod_{i \in I} X_i$ nicht leer.*

In einer anderen Formulierung:

> Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Funktion f mit Definitionsbereich I, sodass für alle $i \in I : f(i) \in X_i$ gilt.

Ein solches f heißt auch *Auswahlfunktion*; daher der Name *Auswahlaxiom*.

Im Jahr 1937 zeigte K. Gödel[1]: wenn die üblichen Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei sind, so sind auch die Axiome zusammen mit dem Auswahlaxiom widerspruchsfrei. Das Auswahlaxiom bringt also keine „neuen“ Widersprüche. Im Jahr 1963 zeigte P. Cohen[2], dass man auch das Gegenteil des Auswahlaxioms, also die Existenz einer Familie nichtleerer Mengen, für die es keine Auswahlfunktion gibt, annehmen kann, ohne dadurch neue Widersprüche zu erhalten. Wenn also die üblichen Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei sind, so sind auch die Axiome zusammen mit der Negation des Auswahlaxioms widerspruchsfrei. Das Auswahlaxiom ist also unabhängig von den anderen Axiomen der Mengenlehre; seine Wahrheit wird von den anderen Axiomen nicht bestimmt. Legt man nur die üblichen Axiome der Mengenlehre zu Grunde,

[1]Kurt Gödel, 1906-1978

[2]Paul Cohen, 1934-2007

liegt das Auswahlaxiom also im „gesetzlich nicht geregelten Raum“. Wir werden das Auswahlaxiom als gültig voraussetzen.

ÜBUNGSAUFGABEN 5.21.

(1) (Funktionen) Für eine Funktion $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$ schreiben wir $f[A]$ für $\{f(a) \,|\, a \in X\}$. Für welche Funktionen gilt, dass für alle Teilmengen A, B von X die Menge $f[A \cap B]$ gleich $f[A] \cap f[B]$ ist?

5. Hintereinanderausführung von Funktionen

DEFINITION 5.22. Seien A, B, C Mengen, sei f eine Funktion von A nach B, und sei g eine Funktion von B nach C. Wir definieren $g \circ f$ durch

$$\begin{array}{rcrcl} g \circ f & : & A & \longrightarrow & C \\ & & a & \longmapsto & g(f(a)). \end{array}$$

Die Funktion $g \circ f$ heißt die *Hintereinanderausführung* oder *funktionale Komposition* von f und g. Man spricht „g nach f“ für $g \circ f$.

SATZ 5.23 (Assoziativität der Hintereinanderausführung). *Seien A, B, C, D Mengen, und sei $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Dann gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Beweis: Zwei Funktionen α und β sind genau dann gleich, wenn sie den gleichen Definitionsbereich haben, und für alle x aus dem Definitionsbereich gilt, dass $\alpha(x) = \beta(x)$. Sei also $x \in A$. Dann gilt $((h \circ g) \circ f)\,(x) = (h \circ g)\,(f(x)) = h(g(f(x)) = h((g \circ f)\,(x)) = (h \circ (f \circ g))\,(x)$. □

SATZ 5.24 (Hintereinanderausführung und inverse Funktion). *Seien A, B Mengen, sei f eine bijektive Funktion von A nach B, und sei $f^{-1} := \{(b, a) \in B \times A \,|\, (a, b) \in f\}$ die zu f inverse Funktion. Dann gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.*

Beweis: Sei $a \in A$. Dann gilt $(a, f(a)) \in f$, und somit $(f(a), a) \in f^{-1}$. Also gilt $f^{-1}(f(a)) = a$. Sei nun $b \in B$, und sei $a \in A$ so, dass $f(a) = b$. Dann gilt $(a, b) \in f$ und somit $(b, a) \in f^{-1}$. Also gilt $b = f(a) = f(f^{-1}(b))$. □

SATZ 5.25. *Seien A, B, C Mengen, sei f eine Funktion von A nach B, und sei g eine Funktion von B nach C.*

(1) *Wenn $g \circ f$ surjektiv auf C ist, so ist auch g surjektiv auf C.*
(2) *Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.*

Beweis: (1) Sei $c \in C$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es $a \in A$, sodass $g(f(a)) = c$. Dann belegt $b := f(a)$, dass es ein $b \in B$ gibt, sodass $g(b) = c$. Somit ist g surjektiv. (2) Seien $a_1, a_2 \in A$ so, dass $f(a_1) = f(a_2)$. Dann gilt auch $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Da $g \circ f$ injektiv ist, erhalten wir $a_1 = a_2$. Somit ist f injektiv. □

Übungsaufgaben 5.26.

(1) Finden Sie Mengen A, B, C, eine Funktion $f : A \to B$ und eine Funktion $g : B \to C$, sodass g surjektiv und $g \circ f$ nicht surjektiv ist.
(2) Finden Sie Mengen A, B, C und $f : A \to B$, $g : B \to C$, sodass f injektiv und $g \circ f$ nicht injektiv ist.
(3) Finden Sie Mengen A, B, C und $f : A \to B$, $g : B \to C$, sodass $g \circ f$ surjektiv und f nicht surjektiv ist.
(4) Finden Sie Mengen A, B, C und $f : A \to B$, $g : B \to C$, sodass $g \circ f$ injektiv und g nicht injektiv ist.

Mit id_A bezeichnen wir die Funktion von A nach A mit $\mathrm{id}_A(x) = x$ für alle $x \in A$.

Satz 5.27. *Seien A, B Mengen, sei f eine Funktion von A nach B, und seien l, r Funktionen von B nach A. Wenn $l \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ r = \mathrm{id}_B$, so ist f bijektiv, und es gilt $l = r = f^{-1}$.*

Beweis: Nach Satz 5.25 ist f bijektiv. Es gilt also $l = l \circ \mathrm{id}_B = l \circ (f \circ f^{-1}) = (l \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A \circ f^{-1} = f^{-1}$ und $r = \mathrm{id}_A \circ r = (f^{-1} \circ f) \circ r = f^{-1} \circ (f \circ r) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B = f^{-1}$. □

Satz 5.28. *Seien A, B, C Mengen, sei f eine bijektive Funktion von A nach B, und sei g eine bijektive Funktion von B nach C. Dann ist $g \circ f$ eine bijektive Funktion von A nach C, und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Beweis Es gilt $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) = g \circ (\mathrm{id}_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_C$ und $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f = (f^{-1} \circ \mathrm{id}_B) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. Somit gilt wegen Satz 5.27, dass $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$. □

6. Permutationen und Signatur

Für $n \in \mathbb{N}$ kürzen wir in diesem Abschnitt die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\underline{n}$ ab.

Definition 5.29. Eine *Permutation von $\underline{n}$* ist eine bijektive Abbildung von $\underline{n}$ nach $\underline{n}$.

Wir verwenden für Permutationen verschiedene Schreibweisen: Seien $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene Elemente aus $\underline{n}$. Mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

kürzen wir die Funktion f mit $f(i) = a_i$ für $i \in \underline{n}$ ab.

Bestimmte Permutationen bezeichnet man als *Zyklen.* Seien $k \in \mathbb{N}$ und $i_1, \ldots, i_k$ paarweise verschiedene Elemente aus $\underline{n}$. Dann ist $f := (i_1\, i_2\, \ldots\, i_k)$ die Abbildung mit $f(i_r) = i_{r+1}$ für $r \in \{1, \ldots, k-1\}$, $f(i_k) = i_1$ und $f(j) = j$ für $j \in \underline{n} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Diese Abbildung ist ein *Zyklus der Länge k.* Ein Zweierzyklus, also ein Zyklus der Länge 2, heißt auch *Transposition.*

Die Operation $\circ$ ist die Hintereinanderausführung von Permutationen: es gilt etwa $(1\,2) \circ (1\,3) = (1\,3\,2)$. Manchmal lassen wir das Zeichen $\circ$ weg und schreiben $(1\,2)\,(1\,3) = (1\,3\,2)$. Mit S_n bezeichnen wir die Menge aller Permutationen von $\underline{n}$.

DEFINITION 5.30. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in S_n$. Mit $F(f)$ bezeichnen wir die Menge der *Fehlstellen von* f, und definieren sie als

$$F(f) = \{(i,j) \in \underline{n} \times \underline{n} \mid i < j \text{ und } f(i) > f(j)\}.$$

Die *Signatur von* f ist definiert durch

$$\operatorname{sgn}(f) = (-1)^{|F(f)|}.$$

SATZ 5.31 (Multiplikativität der Signatur). *Seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $f, g \in S_n$. *Dann gilt*

$$\operatorname{sgn}(f \circ g) = \operatorname{sgn}(f) \cdot \operatorname{sgn}(g).$$

Beweis: Seien die Mengen B, C, D definiert durch

$$\begin{array}{rcl} B & := & \{(i,j) \in \underline{n} \times \underline{n} \mid i < j \text{ und } g(i) < g(j) \text{ und } f(g(i)) > f(g(j))\}, \\ C & := & \{(i,j) \in \underline{n} \times \underline{n} \mid i < j \text{ und } g(i) > g(j) \text{ und } f(g(i)) < f(g(j))\}, \\ D & := & \{(i,j) \in \underline{n} \times \underline{n} \mid i < j \text{ und } g(i) > g(j) \text{ und } f(g(i)) > f(g(j))\}. \end{array}$$

Es gilt $F(f \circ g) = B \cup D$ und $F(g) = C \cup D$. Wir bestimmen nun $F(f)$ und definieren dazu I und J durch

$$\begin{array}{rcl} I & := & \{(g(i), g(j)) \mid (i,j) \in B\}, \\ J & := & \{(g(j), g(i)) \mid (i,j) \in C\}. \end{array}$$

Wir zeigen als Nächstes:

$$F(f) = I \cup J. \tag{5.1}$$

$\subseteq$: Sei $(i,j) \in F(f)$. Seien $a, b \in \underline{n}$ so, dass $g(a) = i$ und $g(b) = j$.

1.Fall: $a < b$: Dann gilt $a < b$, wegen $i < j$ auch $g(a) < g(b)$, und wegen $(i,j) \in F(f)$ auch $f(i) > f(j)$, also $f(g(a)) > f(g(b))$. Folglich gilt $(a,b) \in B$, und somit $(i,j) = (g(a), g(b)) \in I$.

2. Fall: $a > b$: Dann gilt $b < a$, wegen $i < j$ auch $g(b) > g(a)$, und da (i,j) eine Fehlstelle ist, auch $f(g(b)) < f(g(a))$. Somit gilt $(b,a) \in C$ und damit $(i,j) = (g(a), g(b)) \in J$.

$\supseteq$: Sei $(i,j) \in I \cup J$.

1. Fall: $(i,j) \in I$: Dann gibt es $(a,b) \in B$, sodass $g(a) = i$ und $g(b) = j$. Wegen $(a,b) \in B$ gilt $g(a) < g(b)$ und $f(g(a)) > f(g(b))$. Somit gilt $(g(a), g(b)) \in F(f)$, also $(i,j) \in F(f)$.

2. Fall: $(i,j) \in J$: Dann gibt es $(a,b) \in C$ mit $i = g(b)$ und $j = g(a)$. Wegen $(a,b) \in C$ gilt $g(a) > g(b)$ und $f(g(a)) < f(g(b))$. Dann ist $(g(b), g(a))$ eine Fehlstelle von f, also gilt $(i,j) \in F(f)$.

Das beweist (5.1).

Es gilt $I \cap J = \varnothing$: Sei $(a,b) \in I \cap J$. Dann gibt es wegen $(a,b) \in I$ ein Paar $(i_1, j_1) \in B$ mit $(a,b) = (g(i_1), g(j_1))$, und wegen $(a,b) \in J$ ein Paar $(i_2, j_2) \in C$ mit $(a,b) = (g(j_2), g(i_2)$. Wegen der Injektivität von g gilt $i_1 = j_2$ und $j_1 = i_2$. Da $i_1 < j_1$, gilt $j_2 < i_2$, im Widerspruch zu $(i_2, j_2) \in C$.

Also gilt $|F(f)| = |I| + |J|$. Die Injektivität von g liefert $|B| = |I|$ und $|C| = |J|$. Folglich gilt

$$|F(f)| = |B| + |C|.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(f) \cdot \operatorname{sgn}(g) &= (-1)^{|F(f)|} \cdot (-1)^{|F(g|} \\ &= (-1)^{|B|+|C|+|C|+|D|} \\ &= (-1)^{|B|+|D|} \\ &= (-1)^{|F(f \circ g)|}. \end{aligned}$$

Satz 5.32. *Für alle $i, j \in \underline{n}$ mit $i \neq j$ gilt* $\operatorname{sgn}((i\,j)) = -1$.

Beweis: Für den Fall, dass $i = 1$ und $j = 2$ bestimmen wir

$$\operatorname{sgn}((1\,2)) = (-1)^{|F((1\,2))|} = (-1)^1 = -1.$$

Seien nun $i, j \in \underline{n}$ mit $i \neq j$, sei $\tau := (i\,j)$, und sei f eine Permutation mit $f(1) = i$ und $f(2) = j$. Dann gilt

$$(i\,j) = f \circ (1\,2) \circ f^{-1}.$$

Sei dazu $x \in \underline{n}$. Wenn $x \notin \{i, j\}$, so gilt $f^{-1}(x) \notin \{1, 2\}$, und somit $\tau(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$, also $f(\tau(f^{-1}(x))) = x$. Ausserdem gilt $f \circ (1\,2) \circ f^{-1}\,(i) = j$ und $f \circ (1\,2) \circ f^{-1}\,(j) = i$. Also gilt wegen Satz 5.31

$$\operatorname{sgn}((i\,j)) = \operatorname{sgn}(f)^2 \cdot \operatorname{sgn}((1\,2)) = -1.$$

$\square$

Satz 5.33. *Sei $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}_0$, $i, j \in \underline{m}$, und sei $\sigma \in S_m$.*

(1) *σ ist ein Produkt von endlich vielen Transpositionen. (Das Produkt von 0 Transpositionen definieren wir dabei als* id.*)*
(2) *Für alle Transpositionen $\rho_1, \ldots, \rho_a$ und $\tau_1, \ldots, \tau_b$ mit $\sigma = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_a = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_b$ teilt 2 die Differenz $a - b$.*
(3) *Für $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$ gilt*

$$\operatorname{sgn}((i_1\ i_2\ \ldots\ i_n)) = (-1)^{n+1}.$$

Beweis: (1) Sei

$$M(\sigma) := \max(\{0\} \cup \{k \in \{1, \ldots, m\} \mid \sigma(k) \neq k\}).$$

Wir zeigen nun mit Induktion nach n, dass alle Permutationen mit $M(\sigma) = n$ Produkt von Transpositionen sind. Für $n = 0$ gilt $\sigma = \mathrm{id}$; σ ist dann also das Produkt von 0 Transpositionen. Sei nun $n \geq 1$, und sei σ so, dass $M(\sigma) = n$. Sei $k := \sigma(n)$. Es gilt $k < n$. Sei $\rho := (k\ n) \circ \sigma$. Es gilt $\rho(n) = n$ und $\rho(r) = r$ für alle $r > n$. Also gilt $M(\rho) < n$. Somit gibt es nach Induktionsvoraussetzung Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_l$ mit $\rho = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l$. Also gilt $\sigma = (k\ n)^{-1} \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l = (k\ n) \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l$. Somit ist σ ebenfalls ein Produkt von Transpositionen.

(2) Die Signatur von σ ist $(-1)^a = (-1)^b$.

(3) Es gilt $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_n) = (i_1\ i_n) \circ (i_1\ i_2\ \ldots,\ i_{n-1})$, somit folgt die behauptete Gleichheit durch Induktion nach n daraus, dass Transpositionen die Signatur -1 haben und die Signatur multiplikativ ist. □

SATZ 5.34. *Sei $m \geq 2$, und seien $i, j \in \underline{m}$ mit $i < j$. Sei*

$$A_m := \{f \in S_m \mid \mathrm{sgn}(f) = 1\},$$

und sei $(i\ j) \circ A_m := \{(i\ j) \circ f \mid f \in A_m\}$. Dann gilt $A_m \cap ((i\ j) \circ A_m) = \varnothing$ und $A_m \cup ((i\ j) \circ A_m) = S_m$; außerdem ist $\varphi : A_m \to (i\ j) \circ A_m,\ f \mapsto (i\ j) \circ f$ bijektiv.

Beweis: Alle Elemente in A_m haben Signatur 1, alle Elemente in $(i\ j) \circ A_m$ haben Signatur -1, folglich ist ihr Schnitt leer.

Sei nun $f \in S_m$. Wenn $\mathrm{sgn}(f) = 1$, so liegt f in A_m. Wenn $\mathrm{sgn}(f) = -1$, so gilt $f = (i\ j) \circ (i\ j) \circ f$, und da $(i\ j) \circ f$ in A_m liegt, gilt $f \in (i\ j) \circ A_m$.

Um die Bijektivität von φ zu zeigen, definieren wir $\psi : (i\ j) \circ A_m \to A_m,\ f \mapsto (i\ j) \circ f$. Dann gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{A_m}}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{(\mathrm{i\ j}) \circ \mathrm{A_m}}$, folglich ist φ bijektiv. □

ÜBUNGSAUFGABEN 5.35.

(1) Der Beweis von Satz 5.33 (1) liefert eine Zerlegung von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ in ein Produkt von Transpositionen. Geben Sie diese Transpositionen an!
(2) Seien $f, g \in S_m$. Sei $F : S_m \to S_m,\ h \mapsto f \circ h \circ g$. Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.
(3) Sei $F : S_m \to S_m,\ F(\sigma) := \sigma^{-1}$ für $\sigma \in S_m$. Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.

KAPITEL 6

Relationen

1. Äquivalenzrelationen

Wir nennen eine Relation von A nach A auch eine *Relation auf* A.

Definition 6.1. Sei ρ eine Relation auf A.

(1) ρ ist *reflexiv*, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in \rho$.
(2) ρ ist *transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt: wenn $(a, b) \in \rho$ und $(b, c) \in \rho$, so gilt auch $(a, c) \in \rho$.
(3) ρ ist *symmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: wenn $(a, b) \in \rho$, so gilt auch $(b, a) \in \rho$.

Definition 6.2. Sei ρ eine Relation auf A. Die Relation ρ ist eine *Äquivalenzrelation auf* A, wenn sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Definition 6.3. Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A, und sei $a \in A$. Die *Äquivalenzklasse von* a *bezüglich* ρ wird mit $[a]_\rho$ oder a/ρ abgekürzt, und ist definiert durch

$$a/\rho := \{b \in A \mid (a, b) \in \rho\}.$$

Eine Teilmenge C von A ist eine *Äquivalenzklasse von* ρ, wenn es ein $a \in A$ gibt, sodass $C = a/\rho$.

Lemma 6.4. *Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A, und seien $a, b \in A$. Wenn $(a, b) \in \rho$, so gilt $[a]_\rho = [b]_\rho$.*

Beweis: Sei $c \in [a]_\rho$. Dann gilt $(a, c) \in \rho$. Wegen der Symmetrie von ρ gilt auch $(b, a) \in \rho$, und somit wegen der Transitivität von ρ auch $(b, c) \in \rho$. Somit gilt $c \in [b]_\rho$. Sei nun $c \in [b]_\rho$. Dann gilt $(b, c) \in \rho$ und somit wegen $(a, b) \in \rho$ und der Transitivität von ρ auch $(a, c) \in \rho$, und somit $c \in [a]_\rho$. □

Übungsaufgaben 6.5.

(1) Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A, und seien $a, b \in A$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) $(a, b) \in \rho$.
   (b) $[a]_\rho = [b]_\rho$.
   (c) $a \in [b]_\rho$.
   (d) $[a]_\rho \cap [b]_\rho \neq \emptyset$.
(2) Geben Sie ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation auf $A := \{2, 3, 4, 5\}$ an. Geben Sie die Relation in der Form $\rho = \{\ldots\}$ an!

2. Partitionen

DEFINITION 6.6. Sei A eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{P}$ von $\mathcal{P}(A)$ ist eine *Partition von A*, wenn

(1) für alle $P \in \mathcal{P} : P \neq \varnothing$,
(2) $\bigcup\{P \mid P \in \mathcal{P}\} = A$,
(3) für alle $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mit $P_1 \neq P_2$ gilt $P_1 \cap P_2 = \varnothing$.

Wenn $\mathcal{P}$ eine Partition von A ist, so gibt es für jedes $a \in A$ genau ein $P \in \mathcal{P}$, sodass $a \in P$.

DEFINITION 6.7. Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A. Die *Faktormenge von A modulo ρ* ist die Menge $A/\rho := \{[a]_\rho \mid a \in A\}$.

SATZ 6.8. *Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann ist die Faktormenge von A bezüglich ρ eine Partition von A.*

Beweis: Sei $P \in A/\rho$. Dann gibt es ein $a \in A$, sodass $P = [a]_\rho = \{b \in A \mid (a, b) \in \rho\}$. Wegen der Reflexivität von ρ gilt $(a, a) \in \rho$, und folglich $a \in [a]_\rho$, also $a \in P$. Somit gilt $P \neq \varnothing$.

Wir zeigen nun, dass jedes $a \in A$ Element eines Elementes von A/ρ ist. Sei dazu $a \in A$. Dann gilt wegen der Reflexivität von ρ, dass $a \in [a]_\rho$. Somit ist a Element eines Elementes von A/ρ, nämlich von $[a]_\rho$.

Seien nun $P, Q \in A/\rho$. Seien $a, b \in A$ so, dass $P = [a]_\rho$ und $Q = [b]_\rho$. Wir nehmen nun an, dass $P \cap Q \neq \varnothing$. Es gibt dann also ein $c \in A$ mit $c \in P$ und $c \in Q$. Also gilt wegen $c \in [a]_\rho$ auch $(a, c) \in \rho$, und wegen $c \in [b]_\rho$ auch $(b, c) \in \rho$. Wegen der Symmetrie von ρ gilt daher auch $(c, b) \in \rho$, und daher, wegen der Transitivität von ρ, auch $(a, b) \in \rho$. Somit gilt nach Lemma 6.4 auch $P = Q$. $\square$

SATZ 6.9. *Sei A eine Menge, und sei $\mathcal{P}$ eine Partition von A. Dann ist*

$$\rho := \{(a, b) \in A \times A \mid \exists P \in \mathcal{P} \, : \, a \in P \text{ und } b \in P\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A.

DEFINITION 6.10. Sei A eine Menge, und sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A. Eine Teilmenge R von A ist ein *Repräsentantensystem* von A modulo ρ, wenn für alle $a \in A$ die Menge $[a]_\rho \cap R$ genau ein Element enthält.

3. Zahlen als Äquivalenzklassen

Mithilfe von Äquivalenzrelationen können wir aus den natürlichen Zahlen die ganzen Zahlen konstruieren. Sei

$$M := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0.$$

Das Paar (a,b) soll $a-b$ beschreiben. Dann sollen (a,b) und (c,d) die gleiche Zahl beschreiben, wenn $a-b=c-d$, also wenn $a+d=c+b$. Daher definieren wir eine Äquivalenzrelation δ durch

$$\big((a,b),(c,d)\big) \in \delta :\Leftrightarrow a+d=c+b.$$

Diese Relation ist reflexiv: Sei $(x,y) \in M$. Dann gilt $x+y=x+y$, also $\big((x,y),(x,y)\big) \in \delta$. Sie ist symmetrisch: Sei $\big((a,b),(c,d)\big) \in \delta$. Dann gilt $a+d=c+b$, also $c+b=a+d$, und somit $\big((c,d),(a,b)\big) \in \delta$. Sie ist transitiv: Seien $\big((a,b),(c,d)\big) \in \delta$ und $\big((c,d),(e,f)\big) \in \delta$. Dann gilt $a+d=c+b$ und $c+f=e+d$. Also gilt $a+d+c+f=c+b+e+d$. Somit gilt $a+f=e+b$, also $\big((a,b),(e,f)\big) \in \delta$. Wir definieren nun Z als die Faktormenge M/δ. Nun ist $\{(n,0) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Repräsentantensystem von M modulo δ. Für $n \in \mathbb{N}$ kürzen wir die Klasse $(0,n)/\delta$ mit $-n$ ab. Für die Klasse $(n,0)/\delta$ schreiben wir einfach $+n$. Dann gilt $Z=\{-3,-2,-1,+0,+1,+2,+3,\ldots\}$.

Auch für die Einführung der rationalen Zahlen verwenden wir eine Äquivalenzrelation. Dabei klären wir zum Beispiel auch, ob $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ gilt. Sei $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, und sei $(\binom{a}{b},\binom{c}{d}) \in \rho$ genau dann, wenn $ad=bc$. Dann ist ρ eine Äquivalenzrelation, und $R := \{\binom{a}{b} \in A \mid b>0,\ \mathrm{ggT}(a,b)=1\}$ ist ein Repräsentantensystem. Die Faktormenge A/ρ bezeichnet man als die Menge der *rationalen Zahlen*. Für $[\binom{a}{b}]_\rho$ schreibt man $\frac{a}{b}$. Da $\frac{3}{4}=[\binom{3}{4}]_\rho=[\binom{6}{8}]_\rho=\frac{6}{8}$, gilt also wirklich $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$. Den Repräsentanten aus R eines Bruchs bezeichnet man als seine *gekürzte Darstellung*.

Übungsaufgaben 6.11.

(1) Geben Sie die Partition $\mathcal{P}$ der Menge $M=\{1,2,3\}$ an, die von der Äquivalenzrelation $\alpha = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$ induziert wird.
(2) Geben Sie die Äquivalenzrelation β auf $M=\{1,2,3,4\}$ an, die die Partition $\mathcal{P}=\{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}$ induziert.

4. Ordnungsrelationen

Definition 6.12. Sei M eine Menge, und sei ρ eine Relation auf M. Die Relation ρ ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $x,y \in M$ mit $(x,y) \in \rho$ und $(y,x) \in \rho$ gilt: $x=y$.

Definition 6.13. Sei M eine Menge, und sei ρ eine Relation auf M. Die Relation ρ ist eine *Ordnungsrelation*, wenn sie *reflexiv*, *transitiv* und *antisymmetrisch* ist.

Definition 6.14. Sei M eine Menge, und sei $\le$ eine Ordnungsrelation auf M. Die Relation $\le$ ist *linear* (oder *total*) wenn für alle $x,y \in M$ gilt, dass $x \le y$ oder $y \le x$.

Ein Paar $(M,\le)$ aus einer Menge und einer Ordnungsrelation bezeichnen wir als *geordnete Menge*. Wir schreiben auch $a<b$, wenn $a \le b$ und $a \ne b$.

Definition 6.15. Sei $(M,\le)$ eine geordnete Menge, und sei $a \in M$.

(1) a ist ein *kleinstes Element* von M, wenn für alle $b \in M$ gilt: $a \leq b$.
(2) a ist ein *minimales Element* von M, wenn es kein $b \in M$ mit $b < a$ gibt.
(3) Sei T eine Teilmenge von M, und sei $m \in M$. Das Element m ist eine *untere Schranke für* T, wenn für alle $t \in T$ gilt: $m \leq t$. (Eine untere Schranke kann, aber muss nicht, in T liegen.)
(4) a is ein *größtes Element* von M, wenn für alle $b \in M$ gilt: $b \leq a$.
(5) a ist ein *maximales Element* von M, wenn es kein b in M mit $a < b$ gibt.
(6) Sei T eine Teilmenge von M, und sei $m \in M$. Das Element m ist eine *obere Schranke für* T, wenn für alle $t \in T$ gilt: $t \leq m$.

Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ hat höchstens ein kleinstes Element. Jedes kleinste Element ist minimal.

Literaturverzeichnis

[BT09] Bramanti, M. und G. Travaglini: *Matematica. Questione di metodo*. Zanichelli, Bologna, 2009.

[Euk91] Euklid: *Die Elemente*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1991. Buch I–XIII. [Book I–XIII], Based on Heiberg's text, Translated from the Greek and edited by Clemens Thaer.

[Hal76] Halmos, P. R.: *Naive Mengenlehre*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1976. Vierte Auflage, Aus dem Englischen übersetzt von Manfred Armbrust und Fritz Ostermann, Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, No. 6.

[Pea89] Peano, I.: *Arithmetices Principia. Nova methodo exposita*. Fratres Bocca, Rom – Florenz, 1889.

[RU87] Remmert, R. und P. Ullrich: *Elementare Zahlentheorie*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.