Diskrete Mathematik
9. Übungsblatt für den 21. Mai 2008

1. Ein k-dimensionaler Hyperwürfel ist ein Graph $Q_k := (\{0,1\}^k, E_k)$, wobei zwei Knoten $(a_1, \ldots, a_k)$ und $(b_1, \ldots, b_k)$ dann mit einer Kante verbunden sind, wenn sie sich genau an einer Stelle unterscheiden.
   (a) Wieviele Kanten hat Q_k?
   (b) Zeigen Sie, dass Q_k bipartit ist.
   (c) Bestimmen Sie den maximal möglichen Abstand zwischen zwei Knoten in Q_k.

2. Der *Umfang* eines Graphen ist die Länge des kleinsten Zyklus, der im Graph enthalten ist.

   Sei G ein Graph mit Umfang 5, in dem jeder Knoten Grad $\geq d$ hat. Zeigen Sie, dass G mindestens d^2+1 Knoten hat. Finden Sie ein Beispiel in dem Gleichheit gilt.

3. Ein Graph heißt *regulär* wenn alle Knoten vom selben Grad sind.

   Zeigen Sie, dass für alle geraden Zahlen $n \geq 6$ ein regulärer Graph mit n Knoten vom Grad 3 existiert, der keine Zyklen der Länge 3 enthält.

4. Sei T ein Baum mit mindestens 2 Knoten. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichne d_k die Zahl der Knoten vom Grad k in T. Wir nehmen an, dass $d_k = 0$ für alle $k > 3$. Zeigen Sie $d_1 = d_3 + 2$.

5. Sei A eine endliche Menge mit $|A| \geq 3$, sei V die Menge aller Teilmenge von A außer $\emptyset$ und A, und sei $E := \{\{X, Y\} \in V^{(2)} \mid X \subset Y \text{ or } Y \subset X\}$.

   Zeigen Sie, dass (V, E) ein Eulerscher Graph ist.

6. * Friendship Theorem: In einer Gruppe von n Menschen, in der je 2 Personen genau einen gemeinsamen Freund haben, gibt es eine Person, die mit allen anderen befreundet ist.

   Zeigen Sie diesen Satz. (Hinweis: Nehmen Sie zuerst an, der Freundschaftsgraph hat keinen Knoten vom Grad $n-1$ und zeigen Sie, dass dann jede Person gleich viele Freunde hat.)