Diskrete Mathematik
4. Übungsblatt für den 16. April 2008

1. Für $1 \leq i \leq n$ sei $A_i := \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Wieviele Repräsentantensysteme hat $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$?
   (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 vom 1. Übungsblatt.)

2. Sei $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ eine Familie von Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Wir nehmen an, dass die Inzidenzmatrix $M_{\mathcal{A}}$ über den reellen Zahlen invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann ein Repräsentantensystem für $\mathcal{A}$ existiert.

3. Sei $Q = \{1, \ldots, kn\}$ für $k, n \in \mathbb{N}$. Es seien $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ und $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ zwei Partitionen von Q in Blöcke A_i bzw. B_i mit $|A_i| = |B_i| = k$ für alle $1 \leq i \leq n$.

   Zeigen Sie, dass es $E = (e_1, \ldots, e_n)$ gibt, sodass E ein Repräsentantensystem sowohl für $\mathcal{A}$ als auch für $\mathcal{B}$ ist.

   (Hinweis: Betrachten Sie die $n \times n$-Matrix $M = (m_{ij})$ definiert durch $m_{ij} := |A_i \cap B_j|$ für $1 \leq i, j \leq n$.)

4. Ein lateinisches Quadrat L über $\{1, \ldots, n\}$ heißt *normiert* falls die erste Zeile von L gleich $(1, \ldots, n)$ und die erste Spalte von L gleich $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ ist.

   Wieviele normierte lateinische Quadrate gibt es über $\{1, \ldots, 4\}$?

5. Wieviele verschiedene Paare von orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 3 gibt es?

6. Für $a \in \mathbb{N}$ und eine $n \times n$-Matrix $B = (b_{ij})$, definieren wir die $n \times n$-Matrix

$$a \otimes B := \begin{pmatrix} (a, b_{11}) & \cdots & (a, b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a, b_{n1}) & \cdots & (a, b_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times m$-Matrix und B eine $n \times n$-Matrix. Dann definieren wir eine $mn \times mn$ Matrix $A \otimes B$ mit der Blockdarstellung

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} \otimes B & \cdots & a_{1n} \otimes B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \otimes B & \cdots & a_{nn} \otimes B \end{pmatrix}.$$

Sei L_1 ein lateinische Quadrat mit Einträgen aus Q_1, sei L_2 ein lateinische Quadrat mit Einträgen aus Q_2. Zeigen Sie: $L_1 \otimes L_2$ ist ein lateinisches Quadrat mit Einträgen aus $Q_1 \times Q_2$.