Diskrete Mathematik
1. Übungsblatt für den 12. März 2008

1. Wieviele Möglichkeiten gibt es, n Türme auf ein $n \times n$ Schachbrett so zu verteilen, dass keiner einen anderen bedroht?

2. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

   Sei $n \in \mathbb{N}$, sei p eine Primzahl, und sei $k \in \mathbb{N}_0$ maximal sodass p^k ein Teiler von $n!$ ist. Zeigen Sie

   $$k = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

   In wievielen Nullen endet die Zahl 1000! ?

3. Sei p eine Primzahl, $K = \langle \mathbb{Z}_p, +, \cdot \rangle$, und $k, n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie die Zahl der k-dimensionalen Unterräume des Vektorraums K^n.

4. n Kinder haben ihre n Jacken an einer Garderobe abgegeben. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass jedes Kind eine andere als seine eigene Jacken zurückbekommt?

5. Geben Sie eine formale Definition von Durchschnitt und Vereinigung von Multisets.

   Wählen Sie einige Identitäten für Durchschnitt und Vereinigung von klassischen Mengen (z.B. $(\alpha \cup \beta) \cap \gamma = (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta \cap \gamma)$) und überprüfen Sie, ob sie auch für Multisets gelten.

6. Ein aufsteigender Weg im Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist eine Folge von Punkten $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ sodass für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ gilt:

   - entweder $x_{i+1} = x_i$ und $y_{i+1} = y_i + 1$
   - oder $x_{i+1} = x_i + 1$ und $y_{i+1} = y_i$.

   Bestimmen Sie die Zahl der aufsteigenden Wege von $(0, 0)$ nach (n, m) für $n, m \in \mathbb{N}_0$.