Diskrete Mathematik
11. Übungsblatt für den 4. Juni 2008

1. (a) (Exercise 7.15 in Mike Pfiff, Discrete Mathematics, 1991) Bestimmen Sie für den Graphen mit Knoten $a, \ldots, g$ und Kantenlängen wie in untenstehender Tabelle gegeben, die kürzesten Entfernungen von a zu allen anderen Knoten.

	a	b	c	d	e	f	g
a		30				50	
b			40			19	6
c				8	11		35
d					20		
e						10	23
f							12

   (b) Wie verhält sich Dijkstra's Algorithm auf einem nicht zusammenhängenden Graphen?

2. Zeigen Sie, dass im k-ten Schritt des Dijkstra Algorithmus gilt:

   Für $m \in V(G) \setminus S_k$ ist $L_k(m)$ die Länge des kürzesten Pfads von a nach m in G, der keine Knoten außerhalb von $S_k \cup \{m\}$ verwendet.

3. Sei D ein gerichteter Graph mit mindestens einer Kante. Zeigen Sie:

   (a) Falls D keine Quellen hat, dann hat D einen gerichteten Zyklus.

   (b) Falls D keine Senken hat, dann hat D einen gerichteten Zyklus.

4. Ein *Automorphismus* eines Graphen G ist ein Isomorphismus von G nach G. Die Menge aller Automorphismen von G bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}(G)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Funktionen ist.

   (b) Bestimmen Sie die Automorphismengruppen des vollständigen Graphen mit n Knoten, des Zyklus der Länge n, und des Pfades der Länge n für $n \geq 3$.

5. Sei $E = \{\{x, y\} \mid x \in \{a, b\}, y \in \{1, 2, 3\}\}$, und sei $G = (\{a, b, 1, 2, 3\}, E)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(G)$.

6. * Bestimmen Sie die Automorphismengruppe des Peterson-Graphen (Die Definition dieses Graphen finden Sie z.B. in Wikipedia).