

UNTERLAGEN ZUR CHARAKTERISIERUNG ENDLICH ERZEUGTER ABELSCHER GRUPPEN ENTWURF

VORLESUNG "ALGEBRA", SOMMERSEMESTER 2004

1. DIE CHARAKTERISIERUNG ENDLICH ERZEUGTER ABELSCHER GRUPPEN

Satz 1.1 ([Pilz, 1984, Satz 15.5]). *Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G gibt es natürliche Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_0$, $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}$ und Primzahlen p_1, \dots, p_k (nicht notwendigerweise verschieden), sodass*

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{t_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{t_k}} \times \mathbb{Z}^r.$$

Lemma 1.2. *Sei G eine abelsche Gruppe, sei $k \in \mathbb{N}$, seien $g_1, \dots, g_k \in G$, und seien $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Wir nehmen an, dass $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k) = 1$. Dann gibt es $h_1, \dots, h_k \in G$, sodass*

$$h_1 = \sum_{i=1}^k n_i * g_i,$$

und

$$\langle g_1, \dots, g_k \rangle = \langle h_1, \dots, h_k \rangle.$$

Beweis: Wir zeigen durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ gilt, die so definiert ist:

Für alle $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, sodass $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k) = 1$ und $\sum_{i=1}^k |n_i| = n$, und für alle $g_1, \dots, g_k \in G$ gibt es $h_1, \dots, h_k \in G$ sodass $h_1 = \sum_{i=1}^k n_i * g_i$ und $\langle g_1, \dots, g_k \rangle = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$.

$A(1)$ ist unmittelbar klar. Wir fixieren nun $n \geq 2$ und nehmen an, $A(i)$ gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i < n$. Seien $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. Wir nehmen an, dass $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k) = 1$ und $\sum_{i=1}^k |n_i| = n$. Seien $g_1, \dots, g_k \in G$. Da $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k) = 1$ und $\sum_{i=1}^k |n_i| \geq 2$, sind zumindest zwei $n_i \neq 0$. Seien $a, b \in \{1, \dots, k\}$ so, dass $a \neq b$ und $|n_a| \geq |n_b| > 0$. Wir setzen nun

$$h_1 := \sum_{i=1}^k n_i * g_i.$$

Date: May 26, 2004.

Erhard Aichinger, Institut für Algebra, Johannes Kepler Universität Linz, Austria,
erhard@algebra.uni-linz.ac.at.

Es gilt

$$h_1 = \sum_{i=1}^k |n_i| * (\operatorname{sgn}(n_i) * g_i).$$

Wir setzen $g'_i := \operatorname{sgn}(n_i) * g_i$ für $i = 1, \dots, k$. Es gilt also

$$h_1 = |n_a| * g'_a + |n_b| * g'_b + \sum_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{a, b\}} |n_i| * g'_i.$$

Somit gilt

$$h_1 = (|n_a| - |n_b|) * g'_a + |n_b| * (g'_a + g'_b) + \sum_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{a, b\}} |n_i| * g'_i.$$

Da $|n_a| - |n_b| + |n_b| < |n_a| + |n_b|$, gibt es nach Induktionsvoraussetzung $h_2, \dots, h_k \in G$, sodass

$$\langle \{g'_a, g'_a + g'_b\} \cup \{g'_i \mid i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{a, b\}\} \rangle = \langle h_1, \dots, h_k \rangle.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & \langle \{g'_a, g'_a + g'_b\} \cup \{g'_i \mid i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{a, b\}\} \rangle \\ & \supseteq \langle \{g'_a, g'_b\} \cup \{g'_i \mid i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{a, b\}\} \rangle \\ & = \langle g'_1, g'_2, \dots, g'_k \rangle \\ & = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle. \end{aligned}$$

Somit haben wir die gewünschten h_1, \dots, h_k gefunden. \square

Beweis von Satz 1.1: Wir wählen ein k in \mathbb{N} , sodass G durch k Elemente erzeugbar ist, und definieren

$$E := \{(g_1, \dots, g_k) \in G^k \mid \langle g_1, \dots, g_k \rangle = G\}.$$

Jedem $(g_1, \dots, g_k) \in G^k$ sei das Tupel $(\operatorname{ord} g_1, \dots, \operatorname{ord} g_k) \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^k$ zugeordnet. Wir ordnen $(\mathbb{N} \cup \{\infty\})^k$ lexikographisch, und wählen ein $(a_1, \dots, a_k) \in G^k$, für das das zugeordnete Tupel minimal ist. Sei $l \in \{0, \dots, k\}$ so, dass $a_{l+1} = \dots = a_k = \infty$ und $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$G = \langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle + \dots + \langle a_k \rangle.$$

Wir zeigen nun, dass die Gruppe G isomorph zur Gruppe H ist, wobei

$$H := \mathbb{Z}_{\operatorname{ord} a_1} \times \mathbb{Z}_{\operatorname{ord} a_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\operatorname{ord} a_l} \times \mathbb{Z}^{k-l}.$$

Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathbb{Z}^k \longrightarrow G \\ & (z_1, \dots, z_k) \longmapsto \sum_{i=1}^k z_i * a_i. \end{aligned}$$

Wir sehen leicht, dass φ ein Homomorphismus und surjektiv ist. Wir bestimmen nun den Kern von φ . Offensichtlich gilt

$$(1.2) \quad (\text{ord } a_1)\mathbb{Z} \times (\text{ord } a_2)\mathbb{Z} \times \cdots \times (\text{ord } a_l)\mathbb{Z} \times \{0\}^{k-l} \subseteq \text{Ker } \varphi.$$

Wir zeigen nun, dass in (1.2) sogar Gleichheit gilt. Nehmen wir an, es gibt ein Element in $\text{Ker } \varphi$, das nicht in der linken Seite von (1.2) liegt. Dann gibt es auch ein Element $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, sodass $0 \leq z_j < \text{ord } a_j$ für alle $j \in \{1, \dots, l\}$ und $(z_1, \dots, z_k) \in \text{Ker } \varphi$. Es gilt also

$$\sum_{i=1}^k z_i * a_i = 0.$$

Sei $j \in \{1, \dots, k\}$ minimal, sodass $z_j \neq 0$. Wir definieren $z := \text{ggT}(z_1, \dots, z_k)$. Dann gilt

$$z * \left(\sum_{i=j}^k \frac{z_i}{z} * a_i \right) = 0.$$

Da $\text{ggT}(\frac{z_1}{z}, \dots, \frac{z_k}{z}) = 1$, gibt es nach Lemma 1.2 $b_j, \dots, b_k \in G$, sodass

$$b_j = \sum_{i=j}^k \frac{z_i}{z} * a_i$$

und $\langle b_j, \dots, b_k \rangle = \langle a_j, \dots, a_k \rangle$. Daher gilt

$$\langle a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, \dots, b_k \rangle.$$

Wegen $z * b_j = 0$ gilt $\text{ord } b_j \leq z \leq z_j < \text{ord } a_j$; daher ist das Tupel

$$(\text{ord } a_1, \dots, \text{ord } a_{j-1}, \text{ord } b_j, \dots, \text{ord } b_k)$$

lexikographisch kleiner als das Tupel

$$(\text{ord } a_1, \dots, \text{ord } a_{j-1}, \text{ord } a_j, \dots, \text{ord } a_k);$$

das ist ein Widerspruch zur Wahl von a_1, \dots, a_k . Daher muss in (1.2) Gleichheit gelten.

Wegen des Homomorphiesatzes ist G isomorph zu $H/\text{Ker } \varphi$, es gilt also

$$G \cong \mathbb{Z}^k / ((\text{ord } a_1)\mathbb{Z} \times (\text{ord } a_2)\mathbb{Z} \times \cdots \times (\text{ord } a_r)\mathbb{Z} \times \{0\}^{k-l}),$$

also

$$(1.3) \quad G \cong \mathbb{Z}_{\text{ord } a_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\text{ord } a_j} \times \mathbb{Z}^{k-l}.$$

Sei $\text{ord } a_1 = q_1^{\alpha_1} \cdots q_s^{\alpha_s}$, wobei alle q_i verschiedene Primzahlen sind. Da für relativ prime $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt, dass \mathbb{Z}_{ab} isomorph zu $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ ist, ist $\mathbb{Z}_{\text{ord } a_j}$ isomorph zu $\prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{q_i^{\alpha_i}}$. Folglich gewinnt man aus (1.3) die gewünschte Zerlegung von G in ein Produkt zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung und Kopien von \mathbb{Z} . \square

Korollar 1.3. *Sei G endlich erzeugte abelsche Gruppe, und sei T ihr Torsionsteil. Dann gilt $G \cong T \times (G/T)$.*

2. ISOMORPHIEKLASSEN VON UNTERGRUPPEN ENDLICH ERZEUGTER ABELSCHER GRUPPEN

2.1. Endliche Gruppen.

Proposition 2.1. *Seien H, G endliche abelsche Gruppen. Dann gilt $H \hookrightarrow G$ genau dann, wenn $H_p \hookrightarrow G_p$ für alle Primzahlen p gilt.*

Proposition 2.2. *Sei p Primzahl, sei $G = \mathbb{Z}_{p^{t_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{t_k}}$, und sei $H = \mathbb{Z}_{p^{u_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{u_l}}$, wobei $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_k \geq 1$ und $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_l \geq 1$. Äquivalent sind:*

- (1) $H \hookrightarrow G$.
- (2) Es gilt $l \leq k$ und für alle $i \leq l : u_i \leq t_i$.

2.2. Torsionsfreie Gruppen.

Proposition 2.3. *Seien $r, s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\mathbb{Z}_r \hookrightarrow \mathbb{Z}_s$ genau dann, wenn $r \leq s$.*

Beweisskizze: Seien e_1, \dots, e_r die Einheitsvektoren in \mathbb{Z}_r , und sei φ ein Monomorphismus von \mathbb{Z}_r nach \mathbb{Z}_s . Wir zeigen, dass $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$ linear unabhängige Vektoren in \mathbb{Q}^s sind. Seien dazu $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Q}$ so, dass $\sum_{i=1}^r \lambda_i * \varphi(e_i) = 0$. Durch Multiplikation mit allen Nennern der λ_i erhält man μ_1, \dots, μ_r , sodass $\sum_{i=1}^r \mu_i * \varphi(e_i) = 0$. Also gilt $\varphi(\sum_{i=1}^r \mu_i * e_i) = 0$, und wegen der Injektivität von φ auch $\sum_{i=1}^r \mu_i * e_i = 0$. Also gilt $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$, und somit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Da es in \mathbb{Q}^s nur höchstens s linear unabhängige Vektoren geben kann, gilt $r \leq s$. \square

Lemma 2.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei H eine Untergruppe von \mathbb{Z}^n . Dann gibt es $m \in \mathbb{N}_0$, sodass H isomorph zu \mathbb{Z}^m ist.*

Wir induzieren nach n . Für $n = 1$ kennt man alle Untergruppen von \mathbb{Z} als $b * \mathbb{Z}$ mit $b \in \mathbb{Z}$. Für $n \geq 2$ definieren wir

$$E := \mathbb{Z}^{n-1} \times \{0\}.$$

Nach dem Isomorphiesatz ist $H/(H \cap E)$ isomorph zu $(H + E)/E$. Die Gruppe $(H + E)/E$ ist eine Untergruppe von \mathbb{Z}^n/E . Die Gruppe \mathbb{Z}^n/E ist zyklisch; also ist auch $(H + E)/E$, und somit auch $H/(H \cap E)$ zyklisch. Es gibt also ein $h \in H$, sodass

$$H/(H \cap E) = \{z * (h + H \cap E) \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

Also gilt

$$(2.1) \quad H = \langle h \rangle + (H \cap E).$$

Wir behandeln zuerst den Fall, dass $\langle h \rangle \cap (H \cap E) \neq \{0\}$. Sei $a \in \langle h \rangle \cap (H \cap E)$ mit $a \neq 0$. Dann gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$, sodass $z * h = a$ und $z * h \in E$. Wegen $a \neq 0$ gilt auch $z \neq 0$. Da $z * h \in E$, muss also auch $h \in E$ gelten. Aus (2.1) folgt

daher $H \subseteq E$, also $H = H \cap E$. Also ist $(H, +)$ nach Induktionsvoraussetzung isomorph zu \mathbb{Z}^m mit $m \leq n - 1$. In dem Fall, dass $\langle h \rangle \cap (H \cap E) = \{0\}$, ist wegen (2.1) die Gruppe $(H, +)$ direkte Summe von $\langle h \rangle$ und $(H \cap E)$. Die Gruppe $\langle h \rangle$ ist isomorph zu \mathbb{Z} oder $\{0\}$, die Gruppe $H \cap E$ nach Induktionsvoraussetzung zu $\mathbb{Z}^{m'}$ mit $m' \leq n - 1$. $(H, +)$ ist also isomorph zu $\mathbb{Z}^{m'}$ oder $\mathbb{Z}^{m'+1}$. \square

2.3. Endlich erzeugte abelsche Gruppen.

Lemma 2.5. *Seien A, B torsionsfreie abelsche Gruppen, und sei T eine abelsche Torsionsgruppe. Wenn A in $B \times T$ einbettbar ist, dann ist A sogar in B einbettbar.*

Beweis: Sei φ ein Monomorphismus von A in $B \times T$. Wir bezeichnen die Projektionsabbildung von $B \times T$ nach B mit β ; es gilt also $\beta(b, t) = b$ für alle $b \in B, t \in T$. Wir zeigen, dass auch die Hintereinanderausführung $\beta \circ \varphi$ injektiv ist. Sei dazu $x \in A$ so, dass $\beta \circ \varphi(x) = 0$. Es gibt also $t \in T$, sodass $\varphi(x) = (0, t)$. Daher gilt $\varphi(\text{ord } t * x) = (0, 0)$. Da φ injektiv ist, gilt also $\text{ord } t * x = 0$. Nun ist A torsionsfrei; also gilt $x = 0$. \square

Lemma 2.6. *Jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe ist endlich erzeugt.*

Proposition 2.7. *Seien T_1, T_2 endliche abelsche Gruppen, und seien A_1, A_2 endlich erzeugte torsionsfreie Gruppen. Dann gilt $T_1 \times A_1 \hookrightarrow T_2 \times A_2$ genau dann, wenn $T_1 \hookrightarrow T_2$ und $A_1 \hookrightarrow A_2$.*

3. EINDEUTIGKEIT DER ZERLEGUNG

Satz 3.1. *Seien $k, l, r, s \in \mathbb{N}_0, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}, u_1, \dots, u_l \in \mathbb{N}$, seien p_1, \dots, p_k (nicht notwendigerweise verschiedene) Primzahlen, und seien q_1, \dots, q_l (nicht notwendigerweise verschiedene Primzahlen). Seien*

$$\begin{aligned} G &:= \mathbb{Z}_{p_1^{t_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{t_k}} \times \mathbb{Z}^r \\ H &:= \mathbb{Z}_{q_1^{u_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_l^{u_l}} \times \mathbb{Z}^s. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass

$$G \cong H.$$

Außerdem nehmen wir an, dass die Faktoren in folgender Weise geordnet sind: Für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \leq j$ gilt $p_i > p_j$ oder ($p_i = p_j$ und $t_i \geq t_j$), und für alle $i, j \in \{1, \dots, l\}$ mit $i \leq j$ gilt $q_i > q_j$ oder ($q_i = q_j$ und $s_i \geq s_j$).

Dann gilt $r = s, k = l$, und für alle $i \in \{1, \dots, k\}$: $p_i = q_i$.

REFERENCES

[Pilz, 1984] Pilz, G. F. (1984). *Algebra – Ein Reiseführer durch die schönsten Gebiete*. Universitätsverlag Rudolf Trauner, Linz.