Algebra

8.Übungsblatt für den 27. November 2007

(1) Sei $G := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, und sei N der von $(18, 24)$ erzeugte Normalteiler. Die Faktorgruppe G/N ist endlich erzeugt.

   (a) Zu welchem direkten Produkt zyklischer Gruppen ist G/N isomorph?

   (b) Zu welchem direkten Produkt zyklischer Gruppen ist $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\langle(12, 20, 30)\rangle$ isomorph?

(2) Sei $G := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$.

   (a) Berechnen Sie für jede Primzahl p die Gruppe G_p!

   (b) Stellen Sie das Element $([2]_6, [7]_{36})$ als Summe von Elementen in G_2 und G_3 dar.

(3) Zeigen Sie, dass eine abelsche Gruppe G genau dann endlich erzeugt ist, wenn $G/T(G)$ und $T(G)$ beide endlich erzeugt sind.

(4) Sei G eine abelsche Gruppe, und sei H eine Untergruppe von G.

   (a) Zeigen Sie, dass $H/T(H)$ in $G/T(G)$ einbettbar ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $T(H)$ in $T(G)$ einbettbar ist.

(5) Verwenden Sie die beiden vorhergehenden Beispiele, um zu zeigen, dass jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe ebenfalls endlich erzeugt ist.

(6) Zeigen Sie (etwa mit dem Homomorphiesatz), dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times m_2\mathbb{Z} \times m_3\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \mathbb{Z}_{m_3}$ ist.