Algebra

7.Übungsblatt für den 20. November 2007

Wir besprechen am 20.11.07 auch das Beispiel 3 vom 6. Übungsblatt.

(1) (Charakteristische Untergruppen) Ist für jede Gruppe jede Untergruppe des Zentrums charakteristisch?

(2) (Charakteristische Untergruppen) Seien A, B Untergruppen von G, sodass $A \subseteq B$.

   (a) Wir nehmen an, dass A charakteristisch in B ist, und B charakteristisch in G. Muss dann auch A charakteristisch in G sein?

   (b) Wir nehmen an, dass A normal in B ist, und B normal in G. Muss dann auch A normal in G sein?

   (c) Wir nehmen an, dass A charakteristisch in B ist, und B normal in G. Muss A dann auch A normal in G sein?

(3) (Normalteiler von Gruppen mit Primzahlpotenzordnung) Sei G eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung, und sei H ein Normalteiler von G mit $|H| > 1$. Zeigen Sie $|H \cap Z(G)| > 1$.

(4) (Kleine Normalteiler) Sei N ein Normalteiler der Gruppe G mit $|N| = 2$. Zeigen Sie $N \subseteq Z(G)$.

(5) (Große Normalteiler) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G mit $[G : H] = 2$. Zeigen Sie, dass H normal in G ist.

(6) (Lokal zyklische Gruppen)

   (a) Sei G eine Gruppe, und sei $a \in G$ mit Ordnung n. Finden Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ordnung von a^k.

   (b) Zeigen Sie, dass eine lokal zyklische Gruppe von endlichem Exponenten zyklisch ist.