

Algebra

5. Übungsblatt für den 6. November 2007

Wir besprechen am 6.11.07 auch die Beispiele 4 und 5 vom 4. Übungsblatt.

- (1) (Präsentationen von Halbgruppen) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente der durch $E = \{a, b, c\}$ und $R = \{(ab, c), (ba, c), (a^2, a), (b^2, b), (c^2, c)\}$ präsentierten Halbgruppe **H**. Geben Sie die Verknüpfungstafel an!
- (2) (Präsentationen von Halbgruppen) Zeigen Sie, dass die durch $E = \{a, b\}$, $R = \{(ab, ba), (b^3 = b)\}$ präsentierte Halbgruppe unendlich ist.

In den folgenden beiden Beispielen definieren wir eine Gruppe als eine algebraische Struktur

$$(G, \cdot, i, e),$$

wobei $\cdot$ eine zweistellige Verknüpfung, i einstellig, und e nullstellig ist, und in der für alle $x, y, z \in G$ die Gleichungen $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $e \cdot x = x$ und $i(x) \cdot x = e$ gelten.

- (3) Sei $(G, \cdot, i, e)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ die Gleichungen $x \cdot e = x$ und $x \cdot i(x) = e$ gelten.
- (4) Finden Sie eine Menge H , eine Funktion $\cdot$ von $H \times H$ nach H , eine Funktion i von H nach H , und ein Element $e \in H$, sodass alle folgende Eigenschaften erfüllt sind:
 - (a) Für alle $x, y, z \in H$ gelten: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $e \cdot x = x$, $x \cdot i(x) = e$.
 - (b) $(H, \cdot, i, e)$ ist keine Gruppe.
- (5) (Halbgruppen) Sei H eine endliche Unterhalbgruppe einer Gruppe. Zeigen Sie, dass auch H eine Gruppe ist.
- (6) Finden Sie alle Normalteiler der Gruppe S_3 .