**Algebra**

**3.Übungsblatt für den 23. Oktober 2007**

Wir besprechen am 23.10. auch das Beispiel 6 vom 2. Übungsblatt.

(1) (Kongruenzrelationen) Wir definieren auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die zweistelligen Operationen $\wedge$ und $\vee$ durch

$$\begin{aligned} x \wedge y &:= \min(x, y) \\ x \vee y &:= \max(x, y) \end{aligned}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}$ definieren wir eine Relation $\sim$ durch

$$x \sim y \Leftrightarrow \lfloor x^3 \rfloor = \lfloor y^3 \rfloor$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Kongruenzrelation der Algebra $\mathbf{A} := (\mathbb{R}, \wedge, \vee)$ ist, und skizzieren Sie ihre Äquivalenzklassen.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}/\sim$ isomorph zu $(\mathbb{N}, \min, \max)$ ist.

   (c) Hat $\mathbf{A}$ ein endliches homomorphes Bild? Gibt es also einen Homomorphismus von $\mathbf{A}$ in eine endliche Algebra gleichen Typs?

(2) Unter welchen Namen kennen Sie folgende beiden Mengen?

   (a) $\mathrm{Sub}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cap A^A$.

   (b) $\mathrm{Sub}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cap \{\rho \subseteq A \times A \,|\, \rho \text{ ist Äquivalenzrelation auf } A\}$.

   Dabei bezeichnet $\mathrm{Sub}\,\mathbf{A}$ die Menge der Subuniversen von $\mathbf{A}$, also die Menge aller Teilmengen von $\mathbf{A}$, die unter allen fundamentalen Operationen von $\mathbf{A}$ abgeschlossen sind.

(3) (a) Bestimmen Sie das von $\{5, 12\}$ erzeugte Subuniversum von $(\mathbb{N}, +)$.

   (b) Ist die Menge $\mathrm{Sub}\,((\mathbb{N}, +))$ abzählbar?

(4) (Homomorphiesatz) Die Gruppe $\mathbf{C} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, -, 0)$ hat die Kongruenzrelation $\beta = \{(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \,|\, 14x_1 - 10y_1 = 14x_2 - 10y_2\}$. Ist $\mathbf{C}/\beta$ zu $\mathbf{D} := (\mathbb{Z}, +, -, 0)$ isomorph? Geben Sie gegebenenfalls einen Isomorphismus an.

(5) Sei $(M, \leq)$ so geordnet, dass jede nichtleere Teilmenge von $M$ zumindest ein maximales und zumindest ein minimales Element besitzt. Sei $K \subseteq M$ so, dass $(K, \leq)$ Kette ist. Muss $K$ dann endlich sein?

(6) (Bonusbeispiel) Wir betrachten die geordnete Menge $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Ist jede linear geordnete Teilmenge $\mathcal{K}$ von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar?