Algebra

2.Übungsblatt für den 16. Oktober 2007

(1) (Natürliche Zahlen) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \omega$ und $E \subseteq n$ mit $E \neq n$ gilt: Es gibt ein $j \in n$, sodass $E \sim j$. ($A \sim B$ heißt, dass A und B gleichmächtig sind.)

(2) Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge, die nicht linear geordnet ist, und seien $a, b \in X$ so, dass $a \not\leq b$, $b \not\leq a$. Finden Sie eine Ordnung $\sqsubseteq$ auf X so, dass $\leq$ eine Teilmenge von $\sqsubseteq$, und $a \sqsubseteq b$ ist.

(3) Sei $\mathcal{O}$ die Menge der Ordnungsrelationen auf X. Was sind die maximalen Elemente von $(\mathcal{O}, \subseteq)$?

(4) Zeigen Sie, dass jede Ordnungsrelation auf X in einer linearen Ordnung enthalten ist (Ordnungserweiterungssatz).

(5) Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge, die die Noethersche Induktionsbedingung erfüllt. Zeigen Sie, dass $(M, \leq)$ die Minimalbedingung erfüllt. *Hinweis:* Starten Sie mit einer Menge T, die kein minimales Element enthält, und untersuchen Sie $M \setminus T$.

(6) Seien X, Y wohlgeordnet, und seien $f, g : X \to Y$ Ordnungsisomorphismen. Zeigen Sie $f = g$.