Algebra

13. Übungsblatt für den 22. Jänner 2008

(1) Sei E ein Körper, und seien $f, g, h \in E[t]$. Wir nehmen an, dass f irreduzibel über E ist, und dass f das Produkt $g \cdot h$ teilt. Zeigen Sie, dass f einen der Faktoren teilt.

(2) Sei E ein endlicher Körper mit q Elementen, und sei $f \in E[t]$ ein über E irreduzibles Polynom vom Grad m. Zeigen Sie:
   (a) $t^q - t$ zerfällt in E in ein Produkt lauter linearer Faktoren.
   (b) f teilt $t^{q^m} - t$. *Hinweis:* Rechnen Sie in $E[t]/(f)$.

(3) Sei E ein endlicher Körper mit q Elementen, und sei $d \in \mathbb{N}$. Sei $f \in E[t]$ ein über E irreduzibles Polynom mit $f | t^{q^d} - t$. Zeigen Sie $\deg(f) \leq d$. *Hinweis:* Finden Sie Nullstellen von $t^{q^d} - t$ in $L := E[t]/(f)$.

(4) Verwenden Sie die vorigen Beispiele, um folgendes Irreduzibilitätskriterium für Polynome über endlichen Körpern zu zeigen:

   Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f \in K[t]$ mit $\deg(f) = n$. Äquivalent sind:
   (a) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ gilt:
$$\mathrm{ggT}(f, t^{q^i} - t) = 1.$$
   (b) f ist irreduzibel über K.

(5) [1, Exercises 11.1.2] Seien $F \leq K \leq E$ Körpererweiterungen, und sei $[E : F]$ endlich. Wir nehmen an, dass E normal über F ist. Zeigen Sie, dass E normal über K ist, und dass K nicht normal über F sein muss.

(6) Finden Sie alle Unterkörper von $\mathrm{GF}(7^{12})$ mit 7^3 Elementen. Wieviele gibt es? Wieviele nicht zueinander isomorphe gibt es?

Literatur

[1] D. J. S. Robinson. *An Introduction to Abstract Algebra*. Walter de Gruyter, Berlin – New York, www.deGruyter.com, 2003.