Algebra
1.Übungsblatt für den 9. Oktober 2007

(1) (Assoziativität des Relationenprodukts) Seien α, β, γ binäre Relationen auf der Menge A. Zeigen Sie
$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

(2) (Funktionen) Für eine Funktion $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$ schreiben wir $f[A]$ für $\{f(a) | a \in X\}$. Für welche Funktionen gilt, dass für alle Teilmengen A, B von X die Menge $f[A \cap B]$ gleich $f[A] \cap f[B]$ ist?

(3) (Mengenlehre) Zeigen Sie, dass es für zwei Mengen x und y die Menge $x \times y$ gibt, die alle (a, b) mit $a \in x$ und $b \in y$ enthält. *Hinweis:* Eine Zusammenstellung der Axiome der Mengenlehre finden Sie etwa in [2, p. 146–148], [1], und vorübergehend (aus [2]) auf `http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Algebra/w07/shj43bcxd3sc5/`.

(4) (Natürliche Zahlen) Zeigen Sie folgende Eigenschaft von ω:

Sei $i \in \omega$, und sei $x \in i$. Dann gilt $x \in \omega$ und $x \subseteq i$.

Hinweis: Betrachten Sie $S := \{i \in \omega \,|\, \forall x \in i : x \in \omega \text{ und } x \subseteq i\}$.

(5) (Satz von Schröder und Bernstein) Sei $Y := \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 3\}$ und $U := \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 4\}$. Die Funktion $g : x \mapsto x^3$ ist eine injektive Funktion von Y nach U. Welche bijektive Abbildung von Y nach U liefert der Beweis des Satzes von Schröder und Bernstein? Beschreiben Sie dazu die Menge
$$W = \bigcap \{B \subseteq Y \,|\, Y \setminus U \subseteq B \text{ und } g[B] \subseteq B\}.$$

(6) (ω!) Ist die Menge aller bijektiven Abbildungen auf $\mathbb{N}$ abzählbar?

Literatur

[1] H.-D. Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre*. Bibliographisches Institut, Mannheim, third edition, 1994.

[2] Kiyosi Ito, editor. *Encyclopedic dictionary of mathematics*. MIT Press, Cambridge, Mass., second edition, 1986.