Institut für Algebra

Unterlagen zur Vorlesung

Überblick Mathematik II Nawi-Tec

Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2019

Erhard Aichinger

 Version 11. April 2019

Adresse:

Assoc.-Prof. Dr. Erhard Aichinger
Institut für Algebra, Johannes Kepler Universität Linz
4040 Linz, Österreich
e-mail: erhard.aichinger@jku.at

Version 11.4.2019

Druck: Kopierstelle, Abteilung Service, Universität Linz

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Problemstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Eine Nachrichtenquelle produziert eine Folge von 100 Zeichen auf folgende Art: Für jedes Zeichen wird gewürfelt. Fällt der Würfel auf 1, 2, oder 3, so wird das Zeichen a produziert. Fällt der Würfel auf 4 oder 5, wird b produziert. Fällt der Würfel auf 6, so wird c produziert.

Wir fragen uns nun, wieviele a wir erwarten dürfen. Zunächst würde man erwarten, dass etwa die Hälfte der Zeichen a sind. Dennoch ist es möglich, dass der Würfel 100 mal hintereinander auf 4, 5, oder 6 fällt, und kein einziges Zeichen ein a ist. "Möglich schon, aber sehr unwahrscheinlich", sagt die Wahrscheinlichkeitstheorie dazu.

Produziert man nun anstatt 100 Zeichen 10000 oder 100000 Zeichen, so scheint es plausibel, dass der Anteil an a den erwarteten 50% schließlich ganz nahe kommt. Trotzdem ist es denkbar, dass auch unter 100000 Zeichen kein einziges a vorkommt. In den "Gesetzen der großen Zahlen" erhalten wir mathematische Aussagen darüber.

2. Wahrscheinlichkeit

Wir wollen beschreiben, dass die drei Zeichen a, b, c mit den "Wahrscheinlichkeiten" $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ auftreten. Dazu definieren wir den Begriff *Wahrscheinlichkeitsraum*. Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* besteht aus einer endlichen Menge, und einer Funktion, die jedem Element seine relative Häufigkeit zuordnet.

Definition 1.1 (Endliche Wahrscheinlichkeitsräume). Sei Ω eine endliche nichtleere Menge, und sei $P : \Omega \to [0, 1]$. Das Paar (Ω, P) ist ein *Wahrscheinlichkeitsraum*, falls

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

Wir können nun jede Teilmenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes messen.

Definition 1.2. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei A eine Teilmenge von Ω. Dann definieren wir das *Maß von A*, $P(A)$, durch

$$P(A) := \sum_{a \in A} P(a).$$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie beschreibt man Vorgänge, die vom Zufall abhängen, etwa vom Wurf einer Münze, von der Augenzahl, die ein Würfel zeigt, oder von der Kiste, in die eine Roulettekugel fällt. So hängt die Auswahl der Zeichen a, b, c im Beispiel der vorigen Sektion davon ab, wie der Würfel gefallen ist. Es ist zufällig, welches der drei Zeichen a, b, c die Nachrichtenquelle als nächstes produziert. Wenn aber der Würfel gefallen ist, so ist die Auswahl bestimmt. Für die mathematische Beschreibung der Auswahl eines Zeichens trennt man das Würfeln vom deterministischen Vorgang, der Auswahl des Zeichens aus der Augenzahl.

Das Würfeln kodiert man durch einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

und

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \frac{1}{6}.$$

Die Auswahl des Zeichens kodiert man durch eine Funktion von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nach $\{a, b, c\}$. Im genannten Beispiel verwenden wir die Funktion X mit $X(1) = X(2) = X(3) = a$, $X(4) = X(5) = b$, $X(6) = c$. Funktionen, die auf der Trägermenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes definiert sind, heißen *Zufallsvariablen.*

Definition 1.3. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei M eine Menge. Eine M-wertige *Zufallsvariable* X auf (Ω, P) ist eine Funktion $X : \Omega \to M$.

Wir interessieren uns nun dafür, wie häufig das Zeichen b ausgewählt wird. Dazu messen wir, wie groß die Menge $\{\omega \mid X(\omega) = b\}$ ist, nennen das Maß dieser Menge *die Wahrscheinlichkeit für $X = b$*, und kürzen diese mit $P[X = b]$ ab. In unserem Fall erhalten wir

$$P[X = b] = P(\{\omega \mid X(\omega) = b\}) = P(\{4, 5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Definition 1.4 (Wahrscheinlichkeit). Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, M eine Menge, und $X : \Omega \to M$ eine Zufallsvariable. Sei Z eine Teilmenge von M. Dann definieren wir *die Wahrscheinlichkeit, dass X in Z liegt*, abgekürzt $P[X \in Z]$, durch

$$P[X \in Z] := P(\{\omega \mid X(\omega) \in Z\}).$$

Wenn Z einelementig ist und $Z = \{z\}$, dann schreiben wir auch $P[X = z]$ für $P[X \in Z]$.

Wir überlegen uns nun, wie wir Vorgänge beschreiben, die von mehrmaligem Würfeln abhängen. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zweimaligem Würfeln die Augensumme 6 zu erhalten? Wir gehen davon aus, dass bei zweimaligem Würfeln jede Folge gleich wahrscheinlich ist: $(1,1)$ ist also gleich wahrscheinlich wie $(2,3)$, $(3,2)$ oder $(1,6)$. Daher definieren wir einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) durch

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\omega_1, \omega_2) \,|\, \omega_1, \omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}, \\ P((\omega_1, \omega_2)) &= \tfrac{1}{36} \text{ für alle } \omega_1, \omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable X definieren wir durch

$$X((\omega_1, \omega_2)) := \omega_1 + \omega_2.$$

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit für $X = 6$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} P[X = 6] &= P(\{(\omega_1, \omega_2) \in \{1,2,3,4,5,6\}^2 \,|\, X((\omega_1, \omega_2)) = 6\}) \\ &= P(\{(\omega_1, \omega_2) \in \{1,2,3,4,5,6\}^2 \,|\, \omega_1 + \omega_2 = 6\}) \\ &= P(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}) \\ &= \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

Also ist die Augensumme mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{36}$, also $13.888\ldots\,\%$, gleich 6.

Übungsaufgaben 1.5.

(1) Sie würfeln drei Mal, und berechnen das Produkt der Augensummen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt größer als 120 ist.
   (a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) an, der für dieses Problem geeignet ist.
   (b) Geben Sie die Zufallsvariable an, deren Erwartungswert wir suchen.

Wir betrachten bei zweimaligem Würfeln folgende Zufallsvariablen:

(1) $X((\omega_1, \omega_2)) := \omega_1$,
(2) $Y((\omega_1, \omega_2)) := \omega_2$,
(3) $Z((\omega_1, \omega_2)) := \omega_1 + \omega_2$.

X liefert also das Ergebnis des ersten Wurfes, Y das Ergebnis des zweiten Wurfes, und Z die Summe der Augenzahlen beider Würfe. Der Ausgang von X und der Ausgang von Y beeinflussen einander nicht; wenn ich auch weiß, dass der erste

Wurf 5 ist, so bleiben für den zweiten Wurf doch alle Ausgänge gleich wahrscheinlich. Der Ausgang von X liefert aber Einschränkungen für den Ausgang von Z. Ist der erste Wurf 5, so ist die Summe bestimmt nicht mehr 2 oder 12. Wenn Zufallsvariablen einander nicht beeinflussen, so nennt man sie *unabhängig*.

Definition 1.6. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, seien M, N Mengen, und seien $X : \Omega \to M$ und $Y : \Omega \to N$ Zufallsvariablen. X und Y sind *unabhängig*, falls für alle $a \in M$ und $b \in N$ gilt:

$$P[X = a \text{ und } Y = b] = P[X = a] \cdot P[Y = b].$$

Dabei steht $P[X = a \text{ und } Y = b]$ für das Maß $P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = a \text{ und } Y(\omega) = b\})$.

Lemma 1.7. *Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, seien M, N Mengen, und seien $X : \Omega \to M$ und $Y : \Omega \to N$ Zufallsvariablen. Äquivalent sind:*

(1) *X und Y sind unabhängig.*
(2) *Für alle Teilmengen A von M und für alle Teilmengen B von N gilt $P[X \in A \text{ und } Y \in B] = P[X \in A] \cdot P[Y \in B]$.*

Dabei steht $P[X \in A$ und $Y \in B]$ für $P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A$ und $Y(\omega) \in B\})$.

Beweis: (1)⇒(2):

$$\begin{aligned}
P[X \in A \text{ und } Y \in B] &= P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A \text{ und } Y(\omega) \in B\}) \\
&= \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \in A \text{ und } Y(\omega) \in B}} P(\omega) \\
&= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = a \text{ und } Y(\omega) = b}} P(\omega) \\
&= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = a \text{ und } Y(\omega) = b\}) \\
&= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P[X = a \text{ und } Y = b].
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Unabhängigkeit von X und Y und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} P[X = a \text{ und } Y = b] &= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} P[X = a]\cdot P[Y = b] \\ &= (\sum_{a\in A} P[X = a])\cdot(\sum_{b\in B} P[X = b]) \\ &= P[X \in A]\cdot P[X \in B].\end{aligned}$$

(2)⇒(1): Wir fixieren $a \in M$ und $b \in N$. Wir erhalten $P[X = a \text{ und } Y = b] = P[X \in \{a\} \text{ und } Y \in \{b\}]$. Wegen (2) ist der letzte Ausdruck gleich $P[X \in \{a\}]\cdot P[Y \in \{b\}] = P[X = a]\cdot P[X = b]$. □

Definition 1.8 (Bedingte Wahrscheinlichkeit). Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, seien M, N Mengen, und seien $X : \Omega \to M$ und $Y : \Omega \to N$ Zufallsvariablen. Sei A eine Teilmenge von M und B eine Teilmenge von N mit $P[Y \in B] \neq 0$. Dann definieren wir

$$P[X \in A \,|\, Y \in B] := \frac{P[X \in A \text{ und } Y \in B]}{P[Y \in B]},$$

und nennen die linke Seite *die Wahrscheinlichkeit, dass X in A ist, wenn wir schon wissen, dass Y in B ist.*

Wir schränken also unser Interesse auf jene Ereignisse ein, für die Y in B liegt, und messen, für welchen Anteil von diesen X in A liegt.

Wir überlegen uns dazu folgendes Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweimaligem Würfeln der erste Wurf ein Einser ist, wenn die Augensumme 4 ist?

Zur Lösung wählen wir den Wahrscheinlichkeitsraum

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\omega_1,\omega_2)\,|\,\omega_1,\omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}, \\ P((\omega_1,\omega_2)) &= \tfrac{1}{36} \text{ für alle } \omega_1,\omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}.\end{aligned}$$

Wir definieren die Zufallsvariablen X und Y durch

$$\begin{aligned}X(\omega_1,\omega_2) &:= \omega_1 \text{ für alle } \omega_1,\omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}, \\ Y(\omega_1,\omega_2) &:= \omega_1+\omega_2 \text{ für alle } \omega_1,\omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}.\end{aligned}$$

Gesucht ist dann $P[X = 1 \,|\, Y = 4]$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} P[X = 1 \,|\, Y = 4] &= \frac{P[X = 1 \text{ und } Y = 4]}{P[Y = 4]} \\ &= \frac{P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = 1 \text{ und } Y(\omega) = 4\})}{P(\{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) = 4\})} \\ &= \frac{P(\{(1,3)\})}{P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\})} \\ &= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Wurf ein Einser war, wenn wir schon wissen, dass die Augensumme 4 ist, ist also $\frac{1}{3}$.

Aus Neugier stellen wir auch folgende Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 4 ist, wenn wir schon wissen, dass der erste Wurf ein Einser war. Wir berechnen dazu

$$\begin{aligned} P[Y = 4 \,|\, X = 1] &= \frac{P[Y = 4 \text{ und } X = 1]}{P[X = 1]} \\ &= \frac{P(\{(1,3)\})}{P(\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\})} \\ &= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme 4 ist, wenn wir schon wissen, dass der erste Wurf ein Einser ist, ist also $\frac{1}{6}$. Wenn wir uns in dieses Experiment erst zu dem Zeitpunkt einschalten, an dem der erste Würfel auf Eins gefallen ist, müssen wir nur mehr beobachten, ob der zweite Würfel auf 3 fällt, damit die Augensumme 4 ist. Der zweite Würfel fällt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auf 3.

Übungsaufgaben 1.9.

(1) Wie groß ist bei zweimaligem Würfeln die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme größer als 7 ist, wenn wir schon wissen, dass das Produkt der Augenzahlen größer als 8 ist?
(2) Wir würfeln zweimal und werfen eine Münze einmal. Fällt die Münze auf "Zahl", zählen wir beide Augenzahlen der Würfel zusammen, fällt die Münze

auf "Kopf", so zählen wir nur die höhere Augenzahl der beiden Würfe. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und eine Zufallsvariable an, die dieses Experiment beschreiben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze auf "Kopf" gefallen ist, wenn wir schon wissen, dass das Ergebnis des Experiments die Zahl 6 ist?

(3) ([**MacKay, 2003**, Exercise 3.12]) Eine Urne enthält genau eine Kugel, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder weiß oder schwarz ist. Eine weiße Kugel wird in die Urne dazugelegt, die Urne geschüttelt, und eine Kugel wird herausgenommen. Die herausgenommene Kugel ist weiß. (Die Urne ist also wieder im gleichen Zustand wie zuvor.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich jetzt in der Urne eine weiße Kugel befindet?

Hinweis: Wählen Sie als Wahrscheinlichkeitsraum $\{(0,0),(0,1),(1,0),(0,0)\}$. Dabei soll im Paar (ω_1, ω_2) die Zahl $\omega_1 = 0$ sein, falls die Kugel, die am Beginn in der Urne ist, weiß ist. Wenn $\omega_2 = 1$, so nehmen Sie die neu hinzugekommene Kugel heraus, wenn $\omega_2 = 0$, so nehmen Sie die Kugel heraus, die bereits in der Urne war. Die Zufallsvariabe X_1 beschreibe die Farbe der gezogenen Kugel, die Zufallsvariable X_2 beschreibe die Farbe der Kugel, die in der Urne zurückbleibt.

(4) ([**MacKay, 2003**, Exercise 3.14]) In einem Spiel werden zwei Münzen geworfen. Fällt eine der Münzen auf Kopf, so haben Sie einen Preis gewonnen. Um den Preis zu erhalten, müssen Sie auf eine der Münzen zeigen, die auf Kopf fällt.

Sie sehen Fritz bei diesem Spiel zu. Er wirft zwei Münzen, zeigt auf eine und sagt wahrheitsgemäß: "Diese Münze ist auf Kopf gefallen, ich habe gewonnen." Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Münze auf Kopf gefallen ist?

Hinweis: Es geht wieder um die Wahl eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums und geeigneter Zufallsvariablen.

(5) In einer Quizshow stehen hinter drei verschlossenen Türen ein Auto und zwei Ziegen. Der Kandidat zeigt auf eine Tür. Darauf öffnet der Quizmaster, der weiß, hinter welcher Tür das Auto ist, eine der anderen beiden Türen, und zwar so, dass hinter dieser Tür eine Ziege steht. Der Kandidat kann nun zwischen zwei Türen wählen. Die Tür, auf die er bei dieser zweiten Wahl zeigt, wird geöffnet, und er gewinnt, was hinter dieser Tür ist. Der Kandidat hat nun zwei Möglichkeiten: Er kann
   (a) bei seiner anfangs gewählten Tür bleiben.
   (b) auf die andere Tür zeigen.

Berechnen Sie für jede dieser Optionen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kandidat das Auto gewinnt.

Geben Sie dazu eine Zufallsvariable an, die von zwei Würfen mit einem dreiseitigen Würfel und einem Münzwurf abhängt, und deren Ergebnis 1 ist, falls der Kandidat das Auto gewinnt. Der erste Wurf gebe dabei an, wo das

Auto steht, der zweite Wurf, auf welche Tür der Kandidat zuerst zeigt, und der Münzwurf, welche Tür der Quizmaster öffnet, falls er die Wahl hat.

PROPOSITION 1.10. *Sei* (Ω, P) *ein Wahrscheinlichkeitsraum, seien* M, N *Mengen, seien* $X : \Omega \to M$ *und* $Y : \Omega \to N$ *Zufallsvariablen , und sei sei* $A \subseteq M$, $B \subseteq N$. *Wenn* X *und* Y *unabhängig sind und* $P[Y \in B] \neq 0$, *so gilt*

$$P[X \in A \,|\, Y \in B] = P[X \in A].$$

Selbst wenn wir wissen, dass Y in B liegt, hat das keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X in A liegt.

Beweis:

$$P[X \in A \,|\, Y \in B] = \frac{P[X \in A \text{ und } Y \in B]}{P[Y \in B]}.$$

Nun verwenden wir, dass X und Y unabhängig sind, und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{P[X \in A \text{ und } Y \in B]}{P[Y \in B]} &= \frac{P[X \in A] \cdot P[Y \in B]}{P[Y \in B]} \\ &= P[X \in A]. \end{aligned}$$

□

3. Erwartungswert und Varianz

Wenn X eine Zufallsvariable vom Wahrscheinlichkeitsraum Ω nach $\mathbb{R}$ ist, dann bezeichnen wir mit $E(X)$ den *Durchschnitt* ihrer Ausgänge, und nennen ihn *Erwartungswert*.

DEFINITION 1.11. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann definieren wir den *Erwartungswert* $E(X)$ *von* X durch

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega).$$

Wie üblich bezeichnen wir $\{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\}$ mit $X(\Omega)$.

LEMMA 1.12. *Sei* (Ω, P) *ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine Zufallsvariable. Dann gilt*

$$E(X) = \sum_{s \in X(\Omega)} s \cdot P[X = s]. \tag{1.1}$$

Beweis: Wir definieren $\delta(a,b) = 1$, falls $a = b$ und $\delta(a,b) = 0$, falls $a \neq b$. Wir formen nun die rechte Seite von (1.1) um und erhalten:

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in X(\Omega)} s \cdot P[X = s] &= \sum_{s \in X(\Omega)} s \cdot P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = s\}) \\
&= \sum_{s \in X(\Omega)} s \cdot \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=s}} P(\omega) \\
&= \sum_{s \in X(\Omega)} s \cdot \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot \delta(X(\omega), s) \\
&= \sum_{s \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega} s \cdot P(\omega) \cdot \delta(X(\omega), s) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{s \in X(\Omega)} s \cdot P(\omega) \cdot \delta(X(\omega), s).
\end{aligned}$$

In der inneren Summe im letzten Ausdruck ist nur der Summand mit $s = X(\omega)$ ungleich 0. Daher ist der letzte Ausdruck gleich

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) \cdot 1,$$

und das ist genau der Erwartungswert $E(X)$. □

Eine wichtige Eigenschaft des Erwartungswertes ist seine Linearität.

Satz 1.13. *Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, seien X, Y Zufallsvariablen von $\Omega \to \mathbb{R}$, und sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
(2) $E(t \cdot X) = t \cdot E(X)$.

Dabei ist $t \cdot X$ die Funktion, die jedes ω auf $t \cdot X(\omega)$ abbildet.

Beweis: Die erste Eigenschaft beweisen wir durch

$$\begin{aligned}
E(X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot P(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) \cdot P(\omega) + Y(\omega) \cdot P(\omega)) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\omega) \\
&= E(X) + E(Y).
\end{aligned}$$

Die zweite Eigenschaft beweisen wir durch

$$\begin{aligned}
E(t \cdot X) &= \sum_{\omega \in \Omega} (t \cdot X)(\omega) \cdot P(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} t \cdot X(\omega) \cdot P(\omega) \\
&= t \cdot \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) \\
&= t \cdot E(X).
\end{aligned}$$

$\square$

Die folgende Eigenschaft unabhängiger Zufallsvariablen ist verblüffend:

Lemma 1.14. *Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt*

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Beweis: Wir berechnen $E(X) \cdot E(Y)$. Wir verwenden dazu die Darstellung von $E(X)$ aus Lemma 1.12 und erhalten

$$\begin{aligned}
E(X) \cdot E(Y) &= \Big(\sum_{r \in X(\Omega)} r \cdot P[X = r] \Big) \cdot \Big(\sum_{s \in Y(\Omega)} s \cdot P[Y = s] \Big) \\
&= \sum_{r \in X(\Omega)} \sum_{s \in Y(\Omega)} r \cdot s \cdot P[X = r] \cdot P[Y = s]).
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y.

$$\sum_{r \in X(\Omega)} \sum_{s \in Y(\Omega)} r \cdot s \cdot P[X = r] \cdot P[Y = s] = \sum_{r \in X(\Omega)} \sum_{s \in Y(\Omega)} r \cdot s \cdot P[X = r \text{ und } Y = s].$$

Wir verwenden wieder die Funktion δ mit $\delta(a, b) = 1$, falls $a = b$ und $\delta(a, b) = 0$, falls $a \neq b$. Wir fassen für jedes $t \in \mathbb{R}$ alle Summanden zusammen, für die $r \cdot s = t$ ist. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{r \in X(\Omega)} \sum_{s \in Y(\Omega)} r \cdot s \cdot P[X = r \text{ und } Y = s] \\
&\qquad = \sum_{t \in X(\Omega) \cdot Y(\Omega)} t \cdot \sum_{r \in X(\Omega)} \sum_{s \in Y(\Omega)} P[X = r \text{ und } Y = s] \cdot \delta(r \cdot s, t).
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun als nächstes:

(1.2)

$$\text{Für alle } t \in \mathbb{R}\text{:} \sum_{r \in X(\Omega)} \sum_{s \in Y(\Omega)} P[X = r \text{ und } Y = s] \cdot \delta(r \cdot s, t) = P[X \cdot Y = t].$$

Um das zu begründen, beweisen wir zunächst:

(1.3) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\bigcup_{r\in X(\Omega)} \bigcup_{s\in Y(\Omega)} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = r \text{ und } Y(\omega) = s \text{ und } r{\cdot}s = t\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega){\cdot}Y(\omega) = t\}.$$

Wir fixieren $t \in \mathbb{R}$. Die Inklusion $\subseteq$ ist offensichtlich. Für die Inklusion $\supseteq$ fixieren wir ω in Ω so, dass $X(\omega) \cdot Y(\omega) = t$. Das Element ω kommt dann in jener Menge der Vereinigung auf der linken Seite von (1.3) vor, für die $r := X(\omega)$ und $s := Y(\omega)$ ist. Das beweist (1.3). Da die Mengen, die auf der linken Seite von (1.3) vereinigt werden, paarweise disjunkt sind, gilt

$$\begin{aligned}
&P\left(\bigcup_{r\in X(\Omega)} \bigcup_{s\in Y(\Omega)} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = r \text{ und } Y(\omega) = s \text{ und } r \cdot s = t\}\right) \\
&\quad = \sum_{r\in X(\Omega)} \sum_{s\in Y(\Omega)} P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = r \text{ und } Y(\omega) = s \text{ und } r \cdot s = t\}) \\
&\qquad = \sum_{r\in X(\Omega)} \sum_{s\in Y(\Omega)} P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = r \text{ und } Y(\omega) = s\}) \cdot \delta(r \cdot s, t).
\end{aligned}$$

Das Maß der Menge auf der linken Seite von (1.3) steht also auf der linken Seite von (1.2), und das Maß der Menge auf der rechten Seite von (1.3) steht auf der rechten Seite von (1.2). Das beweist (1.2). Wir verwenden nun (1.2), um weiterzurechnen, und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{t\in X(\Omega)\cdot Y(\Omega)} t \cdot \sum_{r\in X(\Omega)} \sum_{s\in Y(\Omega)} P[X = r \text{ und } Y = s] \cdot \delta(r \cdot s, t) &= \sum_{t\in X(\Omega)\cdot Y(\Omega)} t \cdot P[X \cdot Y = t] \\
&= E(X \cdot Y).
\end{aligned}$$

□

Ein Maß für die Schwankung einer Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert ist die *Varianz*. Für einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und eine reelle Zahl a bezeichnen wir mit $\overline{a}$ die Funktion, die durch

$$\begin{array}{cccc} \overline{a} : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & a \end{array}$$

gegeben ist; $\overline{a}$ ist also die konstante Funktion mit Funktionswert a.

Definition 1.15 (Varianz). Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann ist die *Varianz* von X, abgekürzt $V(X)$, definiert durch

$$V(X) := E\left(\left(X - \overline{E(X)}\right)^2\right).$$

Die Varianz ist also der Erwartungswert der Zufallsvariablen Y, die durch $Y(\omega) = (X(\omega) - E(X))^2$ definiert ist.

Übungsaufgaben 1.16.

(1) Sie werfen drei Mal eine faire 5 Schilling-Münze, und notieren die Anzahl von "Zahl" und "Lippizaner". Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl von "Zahl". Bestimmen Sie die Varianz von X. Geben Sie dazu wieder einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) an, der für dieses Problem geeignet ist, und beschreiben Sie die Funktion X.

Satz 1.17. *Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, die paarweise voneinander unabhängig sind. Dann gilt*

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
V\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) &= E\left(\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - \overline{E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - \overline{\sum_{i=1}^n E\left(X_i\right)}\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - \sum_{i=1}^n \overline{E\left(X_i\right)}\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{E\left(X_i\right)}\right)\right)^2\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_i - \overline{E\left(X_i\right)}\right) \cdot \left(X_j - \overline{E\left(X_j\right)}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E\left(\left(X_i - \overline{E\left(X_i\right)}\right) \cdot \left(X_j - \overline{E\left(X_j\right)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Wir trennen nun die Summanden, für die $i = j$ ist, von denen, für die $i \neq j$. Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E\left(\left(X_i - \overline{E(X_i)}\right) \cdot \left(X_j - \overline{E(X_j)}\right)\right) \tag{1.4}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E\left(\left(X_i - \overline{E(X_i)}\right)^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E\left(\left(X_i - \overline{E(X_i)}\right) \cdot \left(X_j - \overline{E(X_j)}\right)\right).$$

Wir fixieren nun $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und betrachten den Ausdruck

$$E\left(\left(X_i - \overline{E(X_i)}\right) \cdot \left(X_j - \overline{E(X_j)}\right)\right). \tag{1.5}$$

Wir rechnen

$$E\left(\left(X_i - \overline{E(X_i)}\right) \cdot \left(X_j - \overline{E(X_j)}\right)\right)$$
$$= E\left(X_i \cdot X_j - \overline{E(X_i)} \cdot X_j - X_i \cdot \overline{E(X_j)} + \overline{E(X_i)} \cdot \overline{E(X_j)}\right).$$

Wir verwenden die Linearität des Erwartungswertes; außerdem verwenden wir, dass $\overline{E(X_i)}$ und $\overline{E(X_j)}$ konstante Funktionen sind und somit $E\left(\overline{E(X_i)} \cdot X_j\right) = E(E(X_i) \cdot X_j) = E(X_i) \cdot E(X_j)$ gilt. Außerdem verwenden wir, dass der Erwartungswert einer konstanten Funktion gleich ihrem (einzigen) Funktionswert ist.

$$E\left(X_i \cdot X_j - \overline{E(X_i)} \cdot X_j - X_i \cdot \overline{E(X_j)} + \overline{E(X_i)} \cdot \overline{E(X_j)}\right)$$
$$= E(X_i \cdot X_j) - E(X_i) \cdot E(X_j) - E(X_j) \cdot E(X_i) + E(X_i) \cdot E(X_j)$$
$$= E(X_i \cdot X_j) - E(X_i) \cdot E(X_j).$$

Da X_i und X_j unabhängig sind, liefert Lemma 1.14, dass der letzte Ausdruck 0 ist. Somit ist (1.5) gleich 0. Wenn wir nun in (1.4) weiterrechnen, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} E\left(\left(X_i - \overline{E(X_i)}\right)^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E\left(\left(X_i - \overline{E(X_i)}\right) \cdot \left(X_j - \overline{E(X_j)}\right)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E\left(\left(X_i - \overline{E(X_i)}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

$\square$

4. Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Zur Beschreibung von Zufallsexperimenten, bei denen mehrmals hintereinander gewürfelt wird, eignen sich *Produkträume*. Wir kürzen Vektoren mit fettgedruckten Buchstaben ab, also zum Beispiel $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ mit $\boldsymbol{\omega}$.

Definition 1.18 (Produktraum). Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Der *n-fache Produktraum* von (Ω, P), abgekürzt $(\Omega, P)^n$, ist das Paar $\left(\Omega^n, P^{(n)}\right)$, das durch

$$\begin{aligned} \Omega^n &= \{\boldsymbol{\omega} \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \Omega\}, \\ P^{(n)}(\boldsymbol{\omega}) &= P(\omega_1) \cdot P(\omega_2) \cdots P(\omega_n) \end{aligned}$$

gegeben ist.

Tatsächlich ist auch im Produktraum die Summe der Wahrscheinlichkeiten wieder 1.

Proposition 1.19. *Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^n} P(\omega_1) \cdot P(\omega_2) \cdots P(\omega_n) = 1. \tag{1.6}$$

Beweis: Wir beweisen die Gleichheit (1.6) mit Induktion nach n. Für $n = 1$ folgt (1.6) unmittelbar aus der Tatsache, dass sich in Ω die Maße der Elemente zu 1 addieren. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^n} P(\omega_1) \cdot P(\omega_2) \cdots P(\omega_n) \\ &\qquad = \sum_{\omega_n \in \Omega} \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^{n-1}} P(\omega_1) \cdot P(\omega_2) \cdots P(\omega_{n-1}) \cdot P(\omega_n) \\ &\qquad\qquad = \sum_{\omega_n \in \Omega} P(\omega_n) \cdot \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^{n-1}} P(\omega_1) \cdot P(\omega_2) \cdots P(\omega_{n-1}). \end{aligned}$$

Wir verwenden die Induktionsvoraussetzung und erhalten

$$\sum_{\omega_n \in \Omega} P(\omega_n) \cdot \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^{n-1}} P(\omega_1) \cdot P(\omega_2) \cdots P(\omega_{n-1}) = \sum_{\omega_n \in \Omega} P(\omega_n) \cdot 1.$$

Da Ω ein Wahrscheinlichkeitksraum ist, ist die Summe der Maße der Elemente in Ω gleich 1. $\square$

Wir überlegen uns, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei dreimaligem Würfeln zumindest einen Sechser zu würfeln. Wir setzen

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \\ \Omega^3 &= \{(1,1,1),(1,1,2),\ldots,(6,6,6)\}, \\ P^{(3)}((\omega_1,\omega_2,\omega_3)) &= \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 = \tfrac{1}{216}. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable X, die uns interessiert, definieren wir so:

$$X((\omega_1,\omega_2,\omega_3)) := \text{ die Anzahl der Sechser in } (\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

Dann suchen wir also

$$P^{(3)}\left(\{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^3 \mid X(\omega) \geq 1\}\right).$$

Da die Summe der Maße aller Elemente von Ω^3 gleich 1 ist, kann man diese Wahrscheinlichkeit auch durch den Ausdruck

$$1 - P^{(3)}\left(\{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^3 \mid X(\omega) = 0\}\right)$$

berechnen. Klarerweise ist $X(\omega)$ genau dann 0, wenn ω in $\{1,2,3,4,5\}^3$ liegt. Es gilt also

$$\begin{aligned} 1 - P^{(3)}\left(\{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^3 \mid X(\omega) = 0\}\right) &= 1 - P^{(3)}\left(\{1,2,3,4,5\}^3\right) \\ &= 1 - 5^3 \cdot \frac{1}{216} \\ &\approx 0.4213 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Sechser gewürfelt wird, ist also ungefähr 42%.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage, wie es bei längerem Würfeln mit der Anzahl der Sechser aussieht. Man sollte ja erwarten, dass etwa ein Sechstel der Würfe Sechser werden. Ein mathematische Aussage darüber finden wir im "schwachen Gesetz der großen Zahlen". Zuvor brauchen wir aber noch ein harmloses Lemma.

Lemma 1.20 (Čebyšëv, Tschebyschow, Tschebyscheff). *Sei* (Ω, P) *ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine Zufallsvariable, und sei* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *mit* $\varepsilon > 0$. *Dann gilt*

$$P(\{\omega \mid\ : X(\omega) \mid \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}.$$

Wir berechnen $E\left(X^2\right)$.

$$E\left(X^2\right) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\,(X(\omega))^2$$
$$= \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ |X(\omega)|\geq\varepsilon}} P(\omega)\,(X(\omega))^2 + \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ |X(\omega)|<\varepsilon}} P(\omega)\,(X(\omega))^2 .$$

Nun wissen wir, dass die Summanden in der ersten Summe mindestens die Größe $P(\omega)\cdot\varepsilon^2$ haben, und dass die Summanden der zweiten Summe positiv sind. Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ |X(\omega)|\geq\varepsilon}} P(\omega)\,(X(\omega))^2 + \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ |X(\omega)|<\varepsilon}} P(\omega)\,(X(\omega))^2 \geq \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ |X(\omega)|\geq\varepsilon}} P(\omega)\,\varepsilon^2 + 0$$
$$= \varepsilon^2\cdot \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ |X(\omega)|\geq\varepsilon}} P(\omega) = \varepsilon^2\cdot P\left(\{\omega\,|\,|X(\omega)|\geq\varepsilon\}\right).$$

Daher gilt

$$\frac{E\left(X^2\right)}{\varepsilon^2} \geq P\left(\{\omega\,|\,|X(\omega)|\geq\varepsilon\}\right).$$

□

Satz 1.21 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen). *Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, sei $X:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, und sei $\varepsilon>0$. Sei E_n gegeben durch*

$$E_n := P^{(n)}\left(\{\boldsymbol{\omega}\,|\,|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\right) - E(X)\,|\geq\varepsilon\}\right).$$

Dann gilt

$$E_n \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2\cdot n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Würfen zwischen 16% und 17% Sechser fallen, konvergiert also gegen 1.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren auf dem Produktraum $(\Omega, P)^n$ die Zufallsvariablen

$$\begin{array}{rcl} X_1(\boldsymbol{\omega}) & := & X(\omega_1) \\ X_2(\boldsymbol{\omega}) & := & X(\omega_2) \\ & \vdots & \\ X_i(\boldsymbol{\omega}) & := & X(\omega_i) \;\text{ für } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ & \vdots & \\ X_n(\boldsymbol{\omega}) & := & X(\omega_n) \end{array}$$

und

$$Y(\boldsymbol{\omega}) := \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\right) - E(X).$$

Wir beobachten zunächst, dass für alle i die Gleichheiten $E(X_i) = E(X)$ und $V(X_i) = V(X)$ gelten. Außerdem sind X_i und X_j für $i \neq j$ unabhängig. Wir berechnen nun den Erwartungswert von Y^2. Es gilt

$$\begin{aligned} E\left(Y^2\right) &= \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^n} P^{(n)}(\boldsymbol{\omega}) \cdot (Y(\boldsymbol{\omega}))^2 \\ &= \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^n} P^{(n)}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X)\right)\right)^2 \\ &= \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^n} P^{(n)}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^n} P^{(n)}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right) - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right). \end{aligned}$$

Für $i \neq j$ sind die Zufallsvariablen X_i und X_j unabhängig. Satz 1.17 ergibt also

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2} \cdot V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V\left(X\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot V\left(X\right) \\ &= \frac{1}{n} V\left(X\right).\end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Čebyšëv, Lemma 1.20, wissen wir, dass

$$P^{(n)}\left(\{\boldsymbol{\omega} \mid |Y\left(\boldsymbol{\omega}\right)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{E\left(Y^2\right)}{\varepsilon^2}.$$

Es gilt also

$$P^{(n)}\left(\left\{\boldsymbol{\omega} \,\Big|\, \left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X\left(\omega_i\right)\right) - E\left(X\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{\frac{1}{n} V\left(X\right)}{\varepsilon^2},$$

und somit

$$E_n \leq \frac{V\left(X\right)}{\varepsilon^2 \cdot n}.$$

Übungsaufgaben 1.22.

(1) Wie oft muss man würfeln, damit das in der VL bewiesene schwache Gesetz der großen Zahlen garantiert, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Augenzahl zwischen 3.4 und 3.6 liegt, größer als 99% ist?

5. Konstruktion von Zufallsvariablen

Wir konstruieren nun aus der Zufallsvariable X, die die Auswahl eines Zeichens auf Basis eines Wurfes mit einem Würfel beschreibt, eine Zufallsvariable X^n, die die Auswahl von n Zeichen durch n-maliges Würfeln beschreibt.

Definition 1.23. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei A eine Menge, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $X : \Omega \to A$ eine Zufallsvariable. Mit $X^{[n]}$ bezeichnen wir die Zufallsvariable, die durch

$$\begin{array}{rcccl} X^{[n]} & : & \Omega^n & \longrightarrow & A^n \\ & & \boldsymbol{\omega} & \longmapsto & (X(\omega_1), X(\omega_2), \ldots, X(\omega_n)) \end{array}$$

definiert ist.

Wenn keine Verwechslung möglich ist, schreiben wir auch X^N für $X^{[N]}$.

Die folgende Konstruktion brauchen wir, um die Ergebnisse zweier Zufallsvariablen gemeinsam zu untersuchen.

Definition 1.24. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, seien M, N Mengen, und seien $X : \Omega \to M$, $Y : \Omega \to N$ Zufallsvariablen. Dann definieren wir die Zufallsvariable $X \otimes Y$ durch

$$\begin{array}{rcrcl} X \otimes Y & : & \Omega & \longrightarrow & M \times N \\ & & \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)). \end{array}$$

Literaturverzeichnis

[MacKay, 2003] MacKay, D. J. C. (2003). *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge University Press, New York. The book can be viewed at `http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itprnn/book.html`.