Institut für Algebra

Unterlagen zur Vorlesung

Überblick Mathematik I
Nawi-Tec

Vektorrechnung und Lineare Algebra

Wintersemester 2019

Erhard Aichinger

Version 6. März 2019

Adresse:

Assoc.-Prof. Dr. Erhard Aichinger
Institut für Algebra, Johannes Kepler Universität Linz
4040 Linz, Österreich
e-mail: erhard.aichinger@jku.at

Version 6.3.2019

Druck: Kopierstelle, Abteilung Service, Universität Linz

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

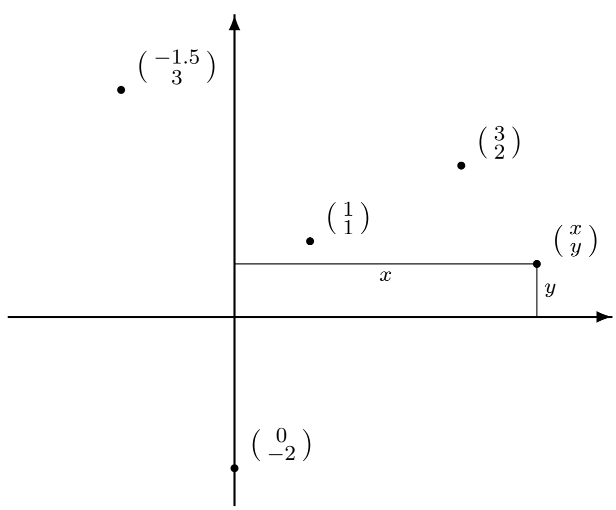
Vektorrechnung

1. Koordinaten

Wir beschreiben – nach einer Idee von René Descartes (1596 – 1650) – jeden Punkt in der Ebene durch ein Paar reeller Zahlen. Die Menge der Paare reeller Zahlen kürzen wir mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ ab.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}.$$

Für das Paar $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ schreiben wir auch (x, y). Aus der folgenden Skizze ist ersichtlich, wie wir jeden Punkt durch ein Zahlenpaar (seine *kartesischen Koordinaten*) beschreiben.

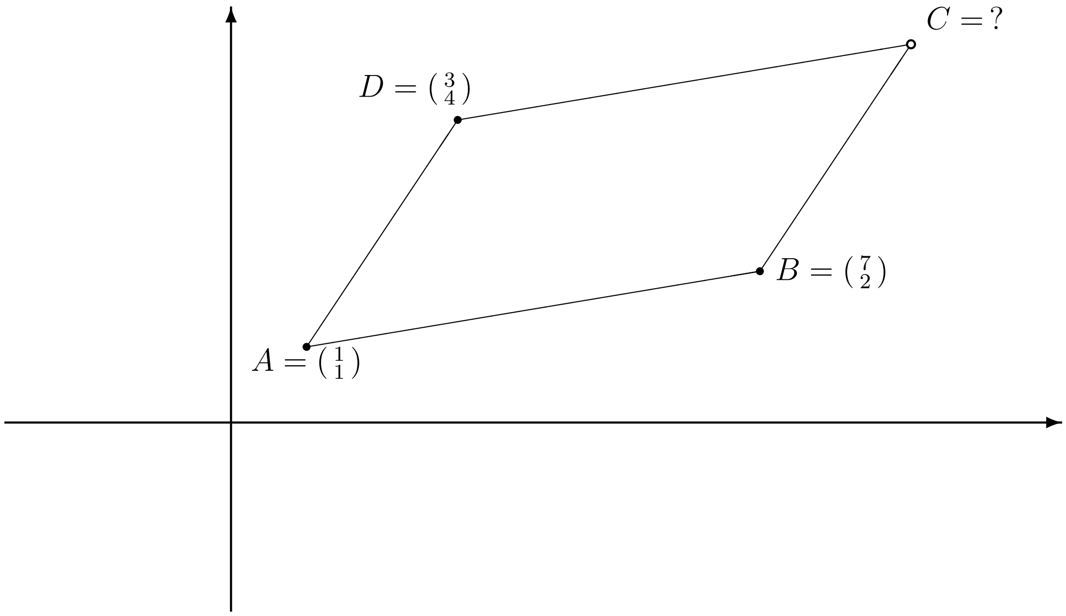


2. Vektoren

Wo liegt der Punkt C im Parallelogramm $ABCD$, dessen Punkte A, B und D durch

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ B = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 2 \end{smallmatrix}\right),\ D = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$$

gegeben sind?



Um von A nach B zu kommen, müssen wir 6 nach rechts und 1 nach oben gehen.

$$\vec{AB} = \binom{7}{2} - \binom{1}{1} = \binom{6}{1}.$$

Wenn wir von D starten und um 6 nach rechts und 1 nach oben gehen, landen wir bei C.

$$C = D + \vec{AB} = \binom{3}{4} + \binom{6}{1} = \binom{9}{5}.$$

Wir bemerken, dass wir ein Paar reeller Zahlen, wie etwa $\binom{6}{1}$, verwenden, um zwei verschiedene Dinge zu beschreiben:

- Den Punkt, der um 6 Längeneinheiten rechts und um 1 Längeneinheit über dem Punkt $\binom{0}{0}$ liegt.
- Den Weg (*Vektor*) von $\binom{1}{1}$ nach $\binom{7}{2}$.

In Mathematica werden Vektoren als Listen dargestellt.

```
a = {1, 1};
b = {7, 2};
d = {3, 4};
ab = b − a
{6, 1}
c = d + ab
{9, 5}
```

3. Die Länge eines Vektors

Wir lösen folgendes Beispiel:

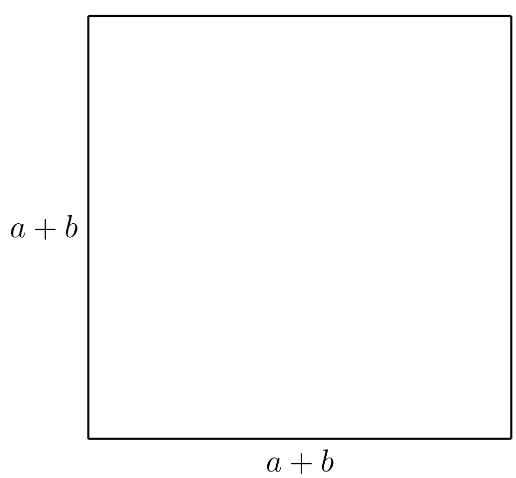
> Herr A geht von $\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right)$ aus 1 Einheit in Richtung Südosten. Wo landet er?

"Richtung Südosten" heißt "in Richtung $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$". Allerdings hat $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ die Länge $\sqrt{2} \approx 1.41421$. Daher hat $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ die Länge 1 und zeigt auch in Richtung Südosten. Herr A landet also im Punkt Z, den wir uns mit

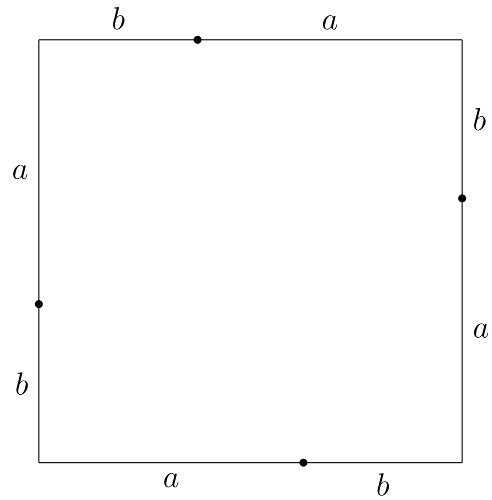
$$Z = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right) \approx \left(\begin{smallmatrix}3.7\\1.3\end{smallmatrix}\right)$$

ausrechnen.

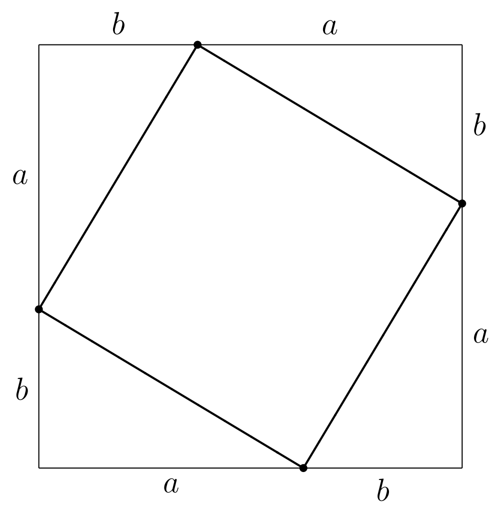
Wir überlegen uns jetzt, wie lange der Vektor $\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)$ ist. Das heißt, wir wollen wissen, wie lange in einem Dreieck, in dem die Seiten mit den Längen a und b einen rechten Winkel einschließen, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist. Vergessen wir kurz unsere klassische Bildung, und zeichnen wir ein Quadrat mit Seitenlänge $a + b$.



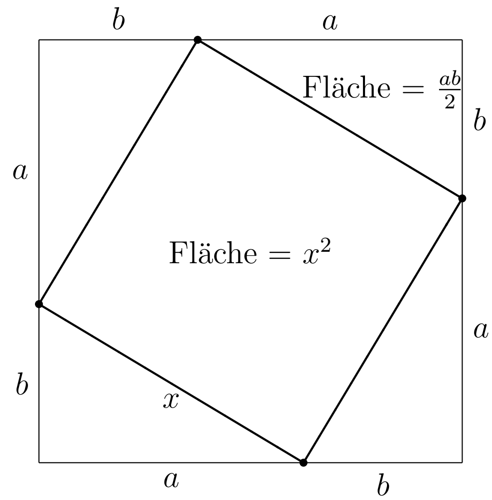
Jetzt unterteilen wir jede der vier Quadratseiten in ein Stück der Länge a und ein Stück der Länge b.



Wir verbinden die vier Teilungspunkte.



Das innere jetzt eingezeichnete Viereck ist ein Quadrat. Das kann man so begründen: wenn man die ganze Zeichnung um 90° gegen den Uhrzeigersinn dreht, kommt das innere Viereck auf sich selbst zu liegen: daher sind alle vier Winkel des inneren Vierecks gleich groß. In jedem Dreieck ist die Winkelsumme 180°, und daher ist in jedem Viereck die Winkelsumme 360°. Also ist jeder Winkel des inneren Vierecks gleich $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Sei x die Länge des Vektors $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$. Dann hat das innere Viereck die Fläche x^2. Jedes der vier rechtwinkeligen Dreiecke hat die Fläche $\frac{a\,b}{2}$.



Das innere Viereck und die vier rechtwinkeligen Dreiecke ergeben zusammen die Fläche des großen Quadrats mit der Seitenlänge $a + b$, also gilt

$$x^2 + 4\frac{a\,b}{2} = (a + b)^2.$$

Das heißt

$$x^2 + 2\,a\,b = a^2 + 2\,a\,b + b^2,$$

also

$$x^2 = a^2 + b^2.$$

Mit diesem Zusammenhang, dem Satz des Pythagoras (Pythagoras von Samos, 6. Jh. v. Chr), können wir die Länge x des Vektors $\binom{a}{b}$ ausrechnen.

Wir kürzen die Länge des Vektors $\binom{a}{b}$ mit $\|\binom{a}{b}\|$ ab. Es gilt dann

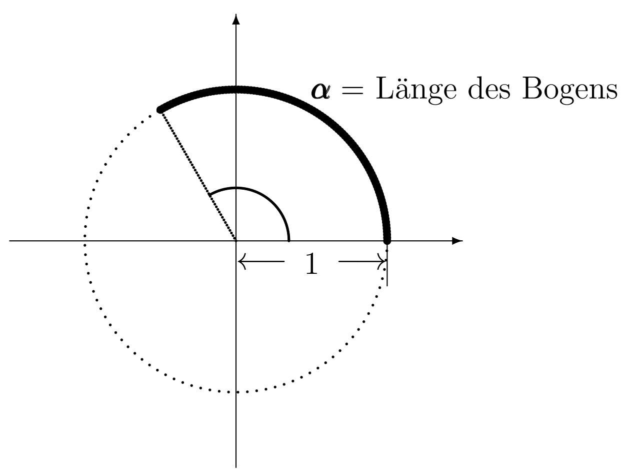
$$\|\textstyle\binom{a}{b}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4. Trigonometrie

In der *Trigonometrie* geht es darum, wie man – rechnerisch – aus den gegebenen Seitenlängen und Winkeln eines Dreiecks die restlichen Seitenlängen und Winkel bestimmen kann. Wenn man etwa von einem Dreieck die Längen der drei Seiten kennt, dann ist das Dreieck dadurch eindeutig bestimmt: die Winkel des Dreiecks sind also durch die Längen der drei Seiten festgelegt. (Wie konstruiert man ein Dreieck, das durch die drei Seitenlängen gegeben ist?) Ebenso ist ein Dreick dadurch bestimmt, dass man eine Seite und die beiden daran anliegenden Winkel kennt. (Wie konstruiert man dieses Dreieck?) Uns geht es jetzt darum, die fehlenden Seitenlängen und Winkel auszurechnen. Dabei geht man so vor:

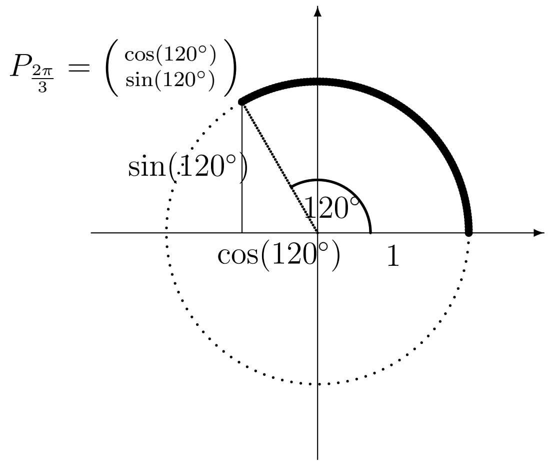
(1) Man tabelliert den Zusammenhang zwischen den Seitenlängen und den Winkeln für rechtwinkelige Dreiecke. Dazu braucht man die *Winkelfunktionen* sin (Sinus) und cos (Cosinus).
(2) Man baut sich alle anderen Dreiecke aus rechtwinkeligen Dreiecken zusammen. Da dieses Zusammenbauen aber immer gleich funktioniert, macht man es einmal für alle Dreiecke. Man gewinnt so zwei Zusammenhänge zwischen Seitenlängen und Winkeln eines Dreiecks: den *Cosinussatz* und den *Sinussatz*. Diese beiden Sätze reichen aus, um alle trigonometrischen Probleme zu lösen.

4.1. Winkel. Winkel misst man nicht nur in Grad ($\circ$), sondern auch in *Radiant* (rad). Dabei wird der Winkel durch die Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis, dem Kreis mit Radius 1, angegeben.



Dabei entsprechen 180° dem Winkel π rad. Demzufolge ist $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad , und 1 rad $\approx 57.2958^\circ$.

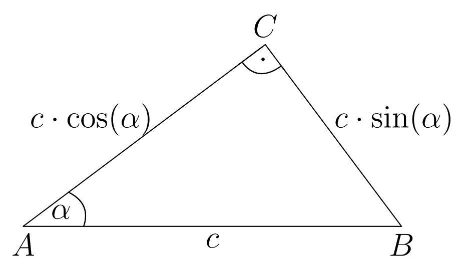
4.2. Winkelfunktionen.



Gegeben ist ein Winkel x. Der auf dem Kreis mit Mittelpunkt $\binom{0}{0}$ und Radius 1 liegende Punkt P_x hat dann die Koordinaten $\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für jeden Winkel x:

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$

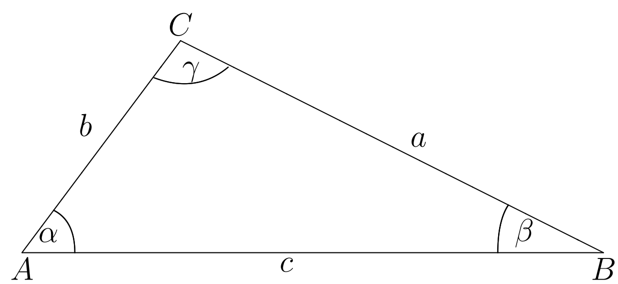
In einem rechtwinkeligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite auch *Hypotenuse*, die beiden dem rechten Winkel anliegenden Seiten heißen *Katheten*.



Übungsaufgaben 1.1.

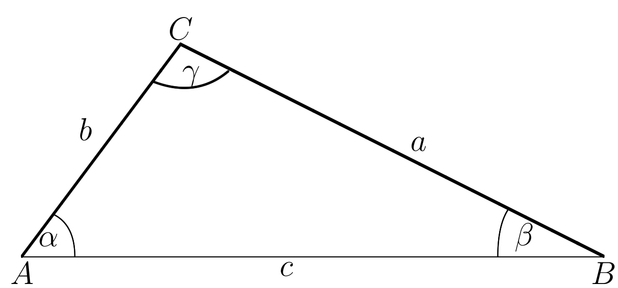
(1) Ein Kletterer kann Wände mit einer Neigung von maximal 65° besteigen. Schafft er eine Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche von 784 m^2 und einer Höhe von 40 m?

4.3. Zusammenhang zwischen Seitenlängen und Winkeln eines Dreiecks. Wir sagen, dass drei Punkte ein *Dreieck* bilden, wenn sie nicht alle drei auf einer Geraden liegen. In einem Dreieck bezeichnet man oft die Längen der Seiten mit a, b, c, und den der Seite mit Länge a gegenüber liegenden Winkel mit α, den der Seite mit Länge b gegenüber liegenden Winkel mit β, und den der Seite mit Länge c gegenüber liegenden Winkel mit γ. Die Seiten sind üblicherweise *gegen den Uhrzeigersinn* mit a, b, c beschriftet.



Der Cosinussatz löst folgendes Problem:

- Gegeben: Seitenlängen a, b eines Dreiecks und der eingeschlossene Winkel γ.
- Gesucht: Die fehlende Seitenlänge c.



Wir betrachten zunächst den Fall $\gamma \leq 90°$, $\alpha \leq 90°$. Wir zeichnen in ein solches Dreieck die Höhe auf b und erhalten aus dem Satz des Pythagoras:

$$c^2 = (b - a\cos(\gamma))^2 + (a\sin(\gamma))^2,$$

also

$$\begin{aligned}
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2(\cos(\gamma))^2 + a^2(\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2\left((\cos(\gamma))^2 + (\sin(\gamma))^2\right) \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + 1\,a^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos(\gamma).
\end{aligned}$$

Für den Fall $\gamma \leq 90^\circ$ und $\alpha > 90^\circ$ zeichnen wir die Höhe auf a und erhalten:

$$\begin{aligned}
c^2 &= (a - b\cos(\gamma))^2 + (b\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= a^2 - 2\,b\,a\cos(\gamma) + b^2(\cos(\gamma))^2 + b^2(\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= a^2 - 2\,b\,a\cos(\gamma) + b^2\left((\cos(\gamma))^2 + (\sin(\gamma))^2\right) \\
c^2 &= a^2 - 2\,b\,a\ \cos(\gamma) + 1\,b^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\ \cos(\gamma).
\end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir den Fall $\gamma > 90^\circ$. Wir zeichnen in ein solches Dreieck die Höhe auf b und erhalten:

$$\begin{aligned}
c^2 &= (b + a\cos(180^\circ - \gamma))^2 + (a\sin(180^\circ - \gamma))^2 \\
c^2 &= (b - a\cos(\gamma))^2 + (a\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2(\cos(\gamma))^2 + a^2(\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2\left((\cos(\gamma))^2 + (\sin(\gamma))^2\right) \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + 1\,a^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\ \cos(\gamma).
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen:

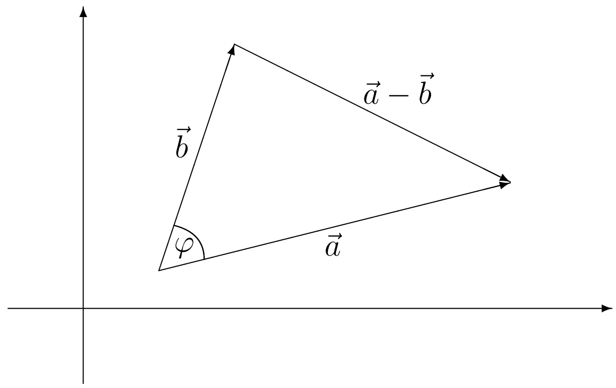
SATZ 1.2 (Cosinussatz). *Wir bezeichnen die Längen der Seiten eines Dreiecks mit a, b, c, und wir bezeichnen den der Seite mit Länge c gegenüber liegenden Winkel mit γ. Dann gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma).$$

Man findet mit dem Cosinussatz γ, wenn a, b und c gegeben sind. Zu jedem $y \in [-1, 1]$ gibt es genau ein $x \in [0, \pi]$, sodass $\cos(x) = y$.

5. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Wir berechnen den Winkel, den die Vektoren $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ miteinander einschließen. Dazu nehmen wir an, dass keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist.



Für den eingeschlossenen Winkel φ gilt nach dem Cosinussatz:

$$\|b-a\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|a\|\,\|b\|\cos(\varphi).$$

Diese Formel können wir vereinfachen:

$$\begin{aligned}
2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= -(\|\vec{b}-\vec{a}\|^2) + \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2\\
2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= -((b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2) + (a_1^2+a_2^2) + (b_1^2+b_2^2)\\
2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= -(b_1^2 - 2\,a_1\,b_1 + a_1^2) - (b_2^2 - 2\,a_2\,b_2 + a_2^2) + a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2\\
2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= 2\,a_1\,b_1 + 2\,a_2\,b_2\\
\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= a_1\,b_1 + a_2\,b_2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1\,b_1 + a_2\,b_2}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}.$$

Die Zahl $a_1\,b_1 + a_2\,b_2$ bezeichnet man als das *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, und man kürzt es mit $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ ab.

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\left(\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}b_1\\b_2\end{smallmatrix}\right)\rangle = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2.$$

Die Winkelformel heißt jetzt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}.$$

Außerdem gilt für jeden Vektor $\vec{a}$

$$\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = (\|a\|)^2.$$

```
{3,4}.{-5,2}
-7
Laenge[v_]:=Sqrt[v.v]
Laenge[{2,3}]
```

$\sqrt{13}$

Unter Verwendung der Mathematica-Function `Norm` kann man diese Länge auch mit `Norm[{2,3}]` ausrechnen.

DEFINITION 1.3. Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *sind aufeinander normal*, wenn $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

Zwei Vektoren sind also aufeinander normal, wenn einer von ihnen der Nullvektor ist, oder wenn sie einen rechten Winkel einschließen. Damit erhält man, dass (wenn $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$) der Vektor $\binom{a}{b}$ mit den Vektoren $\binom{b}{-a}$ und $\binom{-b}{a}$ einen rechten Winkel einschließt.

ÜBUNGSAUFGABEN 1.4.

(1) Von einem gleichschenkeligen Dreieck sind zwei Basiseckpunkte $\binom{-2}{3}$ und $\binom{4}{11}$ bekannt. Ergänzen Sie diese Punkte mit einer Spitze, sodaß das entstehende Dreieck die Höhe 5 besitzt. Wie viele verschiedene Lösungen gibt es? (Sie brauchen nur eine wirklich auszurechnen.)
(2) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen x und y für $x = \binom{3}{2}$, $y = \binom{-6}{-4}$.
(3) Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen folgenden beiden Vektoren. Geben Sie die Ergebnisse in Grad und in Radiant an!
   (a) $a = \binom{3}{2}$, $b = \binom{-3}{2}$.
   (b) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{4}{-3}$.
   (c) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{6}{8}$.
   (d) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{-9}{-12}$.
(4) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ folgende Eigenschaften erfüllt:
   (a) $\langle a+b, a+b \rangle = \langle a, a \rangle + 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle$.
   (b) $\langle a+b, a-b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle$.
(5) Verwenden Sie das Skalarprodukt, um folgenden geometrischen Satz zu beweisen.

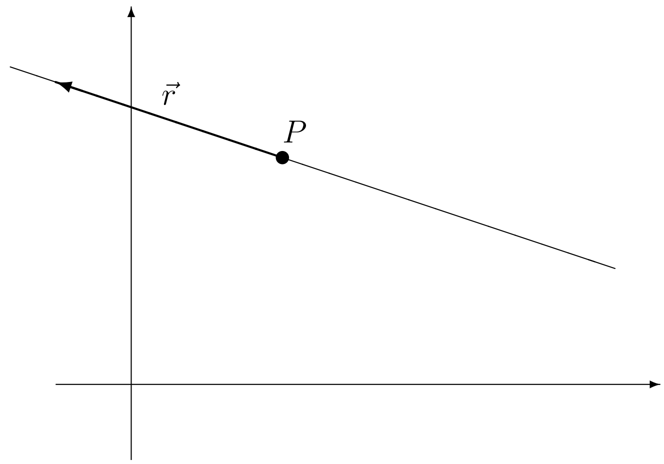
   In einem Parallelogramm mit Seitenlängen a, b, und Diagonalenlängen e, f gilt:

$$2\,(a^2 + b^2) = e^2 + f^2.$$

6. Geraden in der Ebene

Wir überlegen uns, wie man Geraden in der Ebene beschreiben kann.

6.1. Geraden, die durch einen Punkt und eine Richtung gegeben sind.



$P = \binom{2}{3}$, $\vec{r} = \binom{-3}{1}$.

Die Gerade g ist die Menge aller Punkte, die man erreicht, indem man von P ein Stück in Richtung $\vec{r}$ geht.

$$g = \{P + \lambda \cdot \vec{r} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Lies: "g ist gleich der Menge aller Punkte $P + \lambda$ mal $\vec{r}$, wobei λ eine reelle Zahl ist." Mit den Zahlen für P und $\vec{r}$:

$$g = \{\binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

oder, anders geschrieben,

$$g = \{\binom{2-3\lambda}{3+\lambda} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Man kann g auch so schreiben:

$$g = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \text{ es gibt } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ sodass } \binom{x}{y} = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}\}.$$

Lies: "g ist gleich der Menge aller Punkte $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}$ hoch 2, für die es ein λ in den reellen Zahlen gibt, sodass $\binom{x}{y}$ gleich $\binom{2}{3} + \lambda$ mal $\binom{-3}{1}$ ist." Diese Darstellung von g durch *Punkt* und *Richtungsvektor* heißt *Parameterdarstellung der Geraden* g. Man schreibt oft kurz:

$$g : \binom{x}{y} = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$$

oder

$$g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}.$$

Wir überprüfen, ob der Punkt $\binom{-4}{5}$ auf der Geraden g liegt. Er liegt auf g, falls es eine reelle Zahl λ gibt, sodass $\binom{-4}{5}$ gleich $\binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$ ist. Wir suchen also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, das die Gleichungen

$$\begin{aligned} -4 &= 2 - 3\lambda \qquad \text{I} \\ 5 &= 3 + 1\lambda \qquad \text{II} \end{aligned}$$

erfüllt. Aus der Gleichung I erhalten wir $\lambda = 2$; da auch $5 = 3 + 1 \cdot 2$ gilt, ist $\lambda = 2$ eine Lösung des Gleichungssystems. Daher liegt der Punkt $\binom{-4}{5}$ auf g; wir schreiben dafür

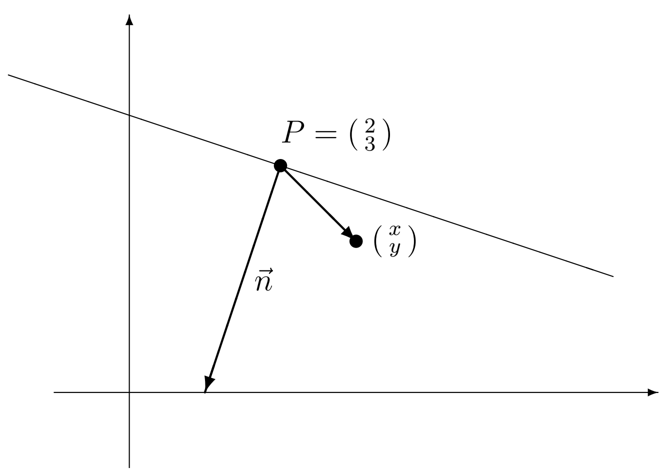
$$\binom{-4}{5} \in g.$$

6.2. Geraden, die durch eine Gleichung gegeben sind. Wir haben im letzten Beispiel überprüft, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Dabei war die Gerade in Parameterform gegeben. Zur Überprüfung war es notwendig, festzustellen, ob es einen Wert für den Parameter λ gibt, der uns genau den getesteten Punkt liefert. Wir mussten also für jeden Punkt ein Gleichungssystem (mit zwei Gleichungen und einer Variable) lösen.

Wir testen nun wieder, ob $\binom{x}{y}$ auf der Geraden g liegt, die durch

$$g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$$

gegeben ist.



Anstatt zu fragen, ob $\binom{x}{y}$ auf g liegt, fragen wir, ob $\binom{x}{y} - \binom{2}{3}$ normal auf $\vec{n}$ ist. Das ist nämlich genau für die Punkte $\binom{x}{y}$ auf g der Fall. Zunächst finden wir den Vektor $\vec{n}$. Auf den Vektor $\binom{a}{b}$ steht immer der Vektor $\binom{-b}{a}$ normal, denn das Skalarprodukt $\langle \binom{a}{b}, \binom{-b}{a} \rangle$ ergibt $-a\,b + a\,b = 0$. Also finden wir $\vec{n}$ durch

$$\vec{n} = \binom{-1}{-3}.$$

Nun überprüfen wir, ob $\binom{x}{y} - \binom{2}{3}$ normal auf $\binom{-1}{-3}$ steht. Das gilt genau dann, wenn

$$\langle \binom{x-2}{y-3}, \binom{-1}{-3} \rangle = 0.$$

Wir rechnen das Skalarprodukt aus und erhalten

$$-x - 3\,y + 11 = 0.$$

Ein Punkt $\binom{x}{y}$ liegt also genau dann auf der Geraden, wenn $-x-3\,y+11 = 0$ ist. Wir können also jetzt viel einfacher überprüfen, ob ein Punkt auf der Geraden g liegt. Wir berechnen $-x-3\,y+11$. Ist das 0, so liegt der Punkt auf der Geraden, und sonst nicht. Außerdem können wir die Gerade jetzt kürzer angeben durch

$$g = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -x - 3\,y = -11\}$$

(lies: "g ist gleich der Menge aller $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}$ hoch 2, für die $-x - 3\,y$ gleich -11 ist.") Das kürzt man auch zu

$$g : -x - 3\,y = -11$$

ab. $-x - 3\,y = -11$ heißt *Gleichung* der Geraden, diese Darstellung der Geraden *Gleichungsform* oder *implizite Darstellung* der Geraden.

6.3. Verwandlung zwischen Gleichungs- und Parameterform.

6.3.1. *Verwandlung von parametrisierter in implizite Darstellung.* Wir verwandeln $g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$ in $g : -x - 3\,y = -11$ so, wie das in obigem Beispiel erklärt worden ist.

6.3.2. *Verwandlung von impliziter in parametrisierte Form.* Wir verwandeln $g : 5\,x - 2\,y = 1$ in parametrisierte Form. Dazu setzen wir $y := t$ und rechnen uns aus diesem y das x aus. Wir erhalten $x = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,t$. Somit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Punkt $\begin{pmatrix} \frac{1}{5}+\frac{2}{5}\,t \\ t \end{pmatrix}$ ein Geradenpunkt. Die Gerade hat also die parametrisierte Darstellung

$$g : X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine andere Darstellung derselben Geraden ist

$$g : X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \binom{2}{5},$$

oder

$$g : X = \binom{1}{2} + t \cdot \binom{-22}{-55}.$$

Spezialfall: Wir verwandeln $g : y = -1$ in Parameterform. Dazu setzen wir $x := t$, und rechnen uns dann das y aus. Das ist aber immer -1. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist also

$\binom{t}{-1}$ ein Geradenpunkt. Die Gerade hat die parametrisierte Darstellung

$$g : X = \binom{0}{-1} + t \cdot \binom{1}{0}.$$

Übungsaufgaben 1.5.

(1) Geben Sie die Gerade durch die Punkte $\binom{3}{2}$ und $\binom{3}{-3}$ in Parameterform und in impliziter Form an!

(2) Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform (= Punkt-Richtungs-Form) folgender Geraden.
   (a) $3\,x + 4\,y = 17$.
   (b) $x = 1$.
   (c) $y = -4$.

(3) Bestimmen Sie eine Gleichung, deren Lösungsmenge die Gerade

$$X = \binom{-3}{6} + \lambda \cdot \binom{-1}{2}$$

ist.

(4) Bestimmen Sie die implizite Darstellung jener Geraden, die parallel zur Geraden g mit

$$g : X = \binom{2}{-1} + t \cdot \binom{3}{-4}$$

sind und von dieser Abstand 10 haben.

(5) Ein Radfahrer startet im Punkt $\binom{2}{3}$ und fährt auf den Punkt $\binom{8}{0}$ zu. Ein Fußgänger startet im Punkt $\binom{4}{-3}$ und geht auf den Punkt $\binom{4}{10}$ zu. In welchem Punkt schneiden sich die Wege der beiden?

(6) Ein Radfahrer im Punkt $\binom{3}{3}$ und ein Fußgänger im Punkt $\binom{9}{-5}$ bewegen sich aufeinander zu, der Radfahrer mit 20 km/h, der Fußgänger mit 5 km/h. Wann und wo treffen die beiden einander?

(7) Vom Quadrat $ABCD$ haben wir folgende Angaben:
   - $A = \binom{-1}{2}$.
   - B liegt auf der Geraden

$$g_B : X = \binom{-1}{2} + \lambda \cdot \binom{4}{3}.$$

   - Die Seitenlänge des Quadrats ist 10.
   - Die Eckpunkte sind gegen den Uhrzeigersinn mit A, B, C, D beschriftet.

   Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C!

(8) Vom Quadrat $ABCD$ haben wir folgende Angaben:
   - $A = \binom{1}{2}$.
   - B liegt auf der Geraden

$$g_B : X = \binom{1}{2} + \lambda \cdot \binom{3}{-4}.$$

   - Die Seitenlänge des Quadrats ist 15.
   - Die Eckpunkte sind gegen den Uhrzeigersinn mit A, B, C, D beschriftet.

   Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C!

(9) Zeigen Sie, dass sich die Schwerlinien des Dreiecks ABC mit $A = \binom{-2}{-1}$, $B = \binom{5}{1}$ und $C = \binom{3}{5}$ in einem Punkt schneiden, und berechnen Sie diesen Schnittpunkt.

(10) Berechnen Sie den Umkreismittelpunkt $U = \binom{u_1}{u_2}$ des Dreiecks ABC mit $A = \binom{-2}{-1}$, $B = \binom{5}{1}$ und $C = \binom{3}{5}$, indem Sie die Bedingung, dass U gleich weit von A, B und C entfernt ist, in Gleichungen in den Variablen u_1 und u_2 umwandeln. Verwenden Sie zur Lösung der auftretenden Gleichungen den Mathematica-Befehl `Solve`.

(11) Bestimmen Sie die implizite Darstellung jener Geraden, die parallel zur Geraden g mit

$$g : X = \binom{2}{0} + t \cdot \binom{3}{-4}$$

sind, und von dieser Abstand 10 haben.

(12) Berechnen Sie den Durchschnitt der Geraden h und j, wobei

$$h : X = \binom{1}{2} + t \cdot \binom{2}{5}$$

und

$$j : 10\,x - 4\,y = 0.$$

(13) Bestimmen Sie die Schnittmenge der Geraden

$$g_1 : X = \binom{3}{4} + t \cdot \binom{-2}{1}$$

und

$$g_2 : 2\,x + 4\,y = 22.$$

(14) Bestimmen Sie den Cosinus des Schnittwinkels der Geraden

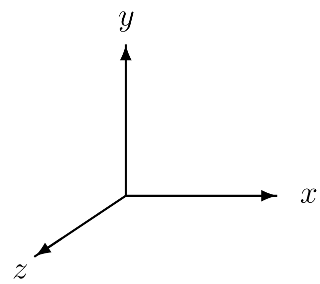
$$g_1 : X = \binom{0}{4} + t \cdot \binom{3}{4}$$

und

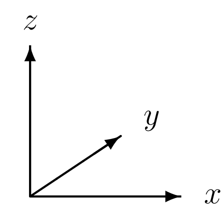
$$g_2 : 12\,x - 5\,y = 22.$$

7. Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Bisher haben wir uns auf die Geometrie in der Ebene beschränkt. Man kann nun auch den Raum mit Tripeln reeller Zahlen, also mit Elementen aus $\mathbb{R}^3$, koordinatisieren. Die Konvention ist es, die Richtungen der Koordinatenachsen wie in folgenden Skizzen zu wählen:



oder



Hält man Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand so, dass sie paarweise im rechten Winkel aufeinander stehen, dann zeigen sie jeweils in die Richtung der positiven x-Achse, y-Achse und z-Achse.

Wir definieren die Operationen, die im $\mathbb{R}^2$ hilfreich waren, allgemein für

$$\mathbb{R}^n := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.

Definition 1.6. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren:

(1) $\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$.
(2) $\lambda\vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ (Skalarprodukt).
(4) Die *Länge* von $\vec{a}$ ist $\|\vec{a}\| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$.

Satz 1.7. *Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$,
(2) $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$,

(3) $\langle \lambda\vec{a}, \vec{b}\rangle = \lambda\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$.
(4) $\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle \geq 0$.
(5) *Wenn* $\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle = 0$, *so gilt* $\vec{a} = 0$.

SATZ 1.8 (Projektionseigenschaft des Skalarprodukts). *Seien* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\vec{b} \neq 0$, *und sei* $\vec{c} := \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle}\,\vec{b}$. *Dann ist* $\vec{a} - \vec{c}$ *normal auf* $\vec{b}$.

Beweis: $\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}, \vec{b}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle}\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle = 0$. □

Der folgende Satz ist als *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* bekannt. Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sagen wir, dass $\vec{a}$ *ein Vielfaches von* $\vec{b}$ ist, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\vec{a} = \lambda\,\vec{b}$.

SATZ 1.9 (Augustin Cauchy, 1821). *Sei* $n \in \mathbb{N}$, *und seien* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:*

(1) $|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.
(2) $|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ *gilt genau dann, wenn* $\vec{b} = 0$ *oder* $\vec{a}$ *ein Vielfaches von* $\vec{b}$ *ist.*

Beweis: Wenn $\vec{b} = 0$, so sind beide Seiten der Ungleichung $= 0$. Wir nehmen nun an, dass $\vec{b} \neq 0$. Wir wissen, dass

$$\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}, \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}\rangle \geq 0.$$

Nun gilt $\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}, \vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle - 2\frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} + \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle}$. Da dieser Ausdruck ≥ 0 ist, gilt

$$\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle \geq \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle^2.$$

Folglich gilt auch

$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \geq |\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle|.$$

Somit gilt (1).

Um (2) zu zeigen, nehmen wir an, dass $|\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ gilt. Wir zeigen, dass dann $\vec{b} = 0$ gilt, oder dass $\vec{a}$ ein Vielfaches von $\vec{b}$ ist. Es gilt $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle^2 = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle$. Wenn also $\vec{b} \neq 0$, so gilt

$$\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}, \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}\rangle = 0.$$

Also gilt $\vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b} = 0$, uns somit ist $\vec{a}$ ein Vielfaches von $\vec{b}$.

Nun zeigen wir folgendes: wenn $\vec{b} = 0$ oder $\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist, so gilt $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle^2 = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$. Wenn $\vec{b} = 0$, so sind beide Seiten der Gleichung $= 0$. Wenn

$\vec{b} \neq 0$ und $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, so gilt $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle^2 = \langle \lambda\vec{b}, \vec{b}\rangle^2 = \lambda^2\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle^2 = \lambda^2\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle = \langle \lambda\vec{b}, \lambda\vec{b}\rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2$. □

ÜBUNGSAUFGABEN 1.10.

(1) Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
   (a) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$.
   (b) $\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\| = 1$.
(2) Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$.

Nun können wir wie im $\mathbb{R}^2$ zeigen:

SATZ 1.11. *Seien $\vec{a}, \vec{b}$ im $\mathbb{R}^n$, und sei φ der Winkel, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen. Dann gilt*

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}.$$

Beweisskizze: $\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos(\varphi) = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\rangle$. □

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es eine Rechenoperation, die einen Vektor liefert, der auf zwei gegebene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal steht: das Kreuzprodukt.

DEFINITION 1.12. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

ist das *Kreuzprodukt* von $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

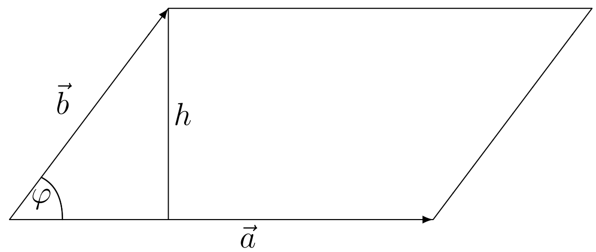
SATZ 1.13. *Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:*

(1) *$\vec{a} \times \vec{b}$ ist normal auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$.*
(2) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle^2$.
(3) *$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ ist die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.*

Beweis: (1): Es gilt

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}\rangle = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0.$$

$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}\rangle = 0$ wird in der Vorlesung nachgerechnet. (2): Vorlesung. (3): Wir nehmen an, dass $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$.



Wir erhalten für die Höhe h auf $\vec{a}$

$$h = \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$$

und für den Flächeninhalt

$$F = \|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} F^2 &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot (\sin(\varphi))^2, \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot (1 - (\cos(\varphi))^2) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2. \end{aligned}$$

Aus (2) ergibt sich jetzt

$$F^2 = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2.$$

$\square$

Durch die Bedingungen an Richtung und Länge ist der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ fast schon eindeutig bestimmt. Zusätzlich gilt: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung $\vec{a}$, der Zeigefinger in Richtung $\vec{b}$, und ist der Mittelfinger normal auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, dann zeigt er in die Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$.

```
Kreuzprodukt[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}]:=
{a2 * b3 - a3 * b2, -(a1 * b3 - a3 * b1), a1 * b2 - a2 * b1}
Kreuzprodukt[{1, -2, 3}, {0, 2, -1}]
{-4, 1, 2}
```

Die Mathematica-Funktion `Cross` liefert ebenfalls das Kreuzprodukt.

Übungsaufgaben 1.14.

(1) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

(2) Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie unter Verwendung der Gleichheitsaussage in der Cauchy-Ungleichung (Satz 1.9) und Satz 1.13 (2), dass $\vec{a} \times \vec{b}$ genau dann 0 ist, wenn $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist.

(3) Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ gilt (*Lagrange-Identität*).

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle.$$

(4) Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle.$$

(5) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{c}.$$

(6) Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt (*Jacobi-Identität*):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

Das von den drei Vektoren a, b und c im $\mathbb{R}^3$ aufgespannte *Parallelepiped* P ist die Menge $P = \{\alpha * a + \beta * b + \gamma * c \mid \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]\}$.

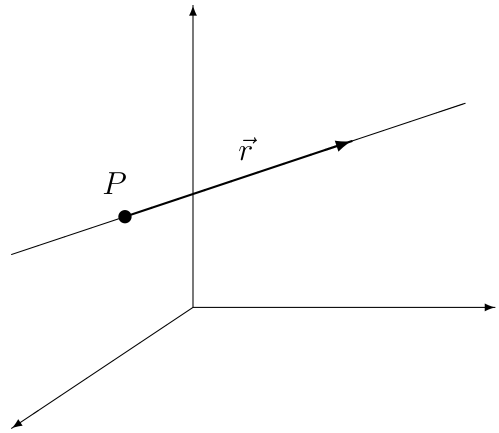
Satz 1.15. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Das von a, b, c aufgespannte Parallelepiped P hat das Volumen $V = |\langle a \times b, c \rangle|$.*

Beweis: Die von a, b aufgespannte Außenfläche von P hat nach Satz 1.13(3) die Fläche $||a \times b||$. Der Vektor $a \times b$ steht normal auf diese Fläche. Wegen der Projektionseigenschaft des Sklaraprodukts (Satz 1.8) hat die Höhe auf die von a und b aufgespannte Fläche die Länge $||\frac{\langle c, a \times b \rangle}{\langle a \times b, a \times b \rangle}(a \times b)||$. Daher ist das Volumen (Grundfläche mal Höhe) gleich $|\langle c, a \times b \rangle|$. □

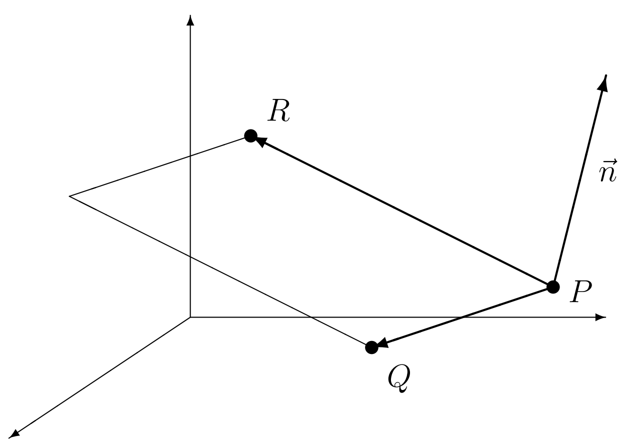
8. Geraden und Ebenen im Raum

8.1. Parameterdarstellung einer Geraden. Genau wie im $\mathbb{R}^2$ lässt sich eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch eine Parameterdarstellung mit einem Punkt und einem Richtungsvektor angeben. Zum Beispiel,

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



8.2. Parameterdarstellung einer Ebene. Wie kann man die Ebene e beschreiben, die die drei Punkte $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ enthält?



Die Ebene e ist die Menge aller Punkte, die man erreicht, indem man von P aus ein Stück in Richtung Q, und dann ein Stück in die Richtung von P nach R geht.

$$e = \{P + \lambda \cdot \vec{PQ} + \mu \cdot \vec{PR} \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

das heißt, die Punkte der Ebene sind von der Form

$$e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Eine Ebene lässt sich also durch einen Punkt und 2 Richtungsvektoren beschreiben.

8.3. Implizite Darstellung einer Ebene. Es sei e die Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, die normal auf den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist. Wir nennen $\vec{n}$ den Normalvektor von e.

Die Ebene e ist die Menge aller Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sodass der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ normal auf $\vec{n}$ ist, also

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Einsetzen der Werte ergibt die *implizite Darstellung der Ebene*,

$$e = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = -9 \}.$$

Ein Normalvektor von e lässt sich direkt aus den Koeffizienten der Ebenengleichung ablesen.

8.3.1. *Verwandlung von Parameterdarstellung in implizite Darstellung.* Wir verwandeln

$$e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

in implizite Form Dazu suchen wir zuerst einen Vektor $\vec{n}$, der auf beide Richtungsvektoren der Ebene normal ist. Dann ist $\vec{n}$ auf die ganze Ebene normal. Wir beschreiben 2 Möglichkeiten einen solchen Normalvektor zu finden:

(1) Wir suchen $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ so, dass

$$\begin{aligned} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle &= 0 \text{ und} \\ \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Das heißt, wir müssen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 + 3n_3 &= 0 \\ 2n_1 - n_2 - 3n_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Klarerweise ist $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ eine Lösung, aber wir wollen einen Vektor $\vec{n}$, der nicht der Nullvektor ist. Wie man alle Lösungen eines linearen Gleichungssystems findet, werden wir im Kapitel 3 sehen.

(2) Alternativ finden wir $\vec{n}$ auch als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{n}$ ist normal auf die Ebene. Ein Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liegt also genau dann in e, wenn der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal auf $\vec{n}$ ist. Wir berechnen

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle = 0$$

und erhalten

$$6x + 9y + z = 38.$$

Somit hat die Ebene e die implizite Darstellung

$$e = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 6x + 9y + z = 38 \}.$$

8.3.2. *Verwandlung von impliziter Darstellung in Parameterdarstellung.* Wir verwandeln $e : x + 3y - 2z = -9$ in parametrisierte Form. Wir beschreiben die Lösungsmenge der Gleichung, indem wir $z = \mu$ und $y = \lambda$ setzen und dann x durch λ und μ ausdrücken. Wir erhalten $x = -9 - 3\lambda + 2\mu$. Somit liegt für alle Werte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ der Punkt $\begin{pmatrix} -9-3\lambda+2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ in der Ebene. Die Ebene hat also die parametrisierte Darstellung

$$e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.4. Implizite Darstellung einer Geraden. Offenbar kann man eine Gerade im Raum nicht durch eine einzige lineare Gleichung in x, y, z beschreiben. Solche Gleichungen beschreiben nämlich Ebenen im Raum. Jede Gerade kann man aber implizit als Schnitt zweier Ebenen, das heißt als Lösungsmenge von 2 linearen Gleichungen beschreiben. Beispielsweise ist

$$g = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y + 3z = 1, x + 4y - 2z = 3 \}$$

die Gerade, die sowohl in der Ebene mit der Gleichung $2x - y + 3z = 1$ als auch in der Ebene mit der Gleichung $x + 4y - 2z = 3$ liegt.

Zwei Ebenen im Raum, die nicht parallel sind, schneiden sich immer in einer Geraden. Parallele Ebenen erkennt man daran, dass ihre Normalvektoren in dieselbe Richtung zeigen. Also sind etwa $2x - y + 3z = 1$ und $-4x + 2y - 6z = 3$ parallel.

8.4.1. *Verwandlung von Parameterdarstellung in implizite Darstellung.* Wir verwandeln

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in implizite Form. Dazu suchen wir 2 Ebenen, die die Gerade enthalten. Liegt g in einer Ebene mit Normalvektor $\vec{n}$, dann ist $\vec{n}$ normal auf den Richtungsvektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\3\end{smallmatrix}\right)$ der Geraden. Zusätzlich liegt der Punkt $\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\-1\end{smallmatrix}\right)$ in der Ebene.

Auf einen Vektor $\left(\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix}\right)$ sind beispielsweise $\left(\begin{smallmatrix}b\\-a\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}c\\0\\-a\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}0\\c\\-b\end{smallmatrix}\right)$ normal. Wir wählen $n_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $n_2 = \left(\begin{smallmatrix}3\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)$ als Vektoren, die im rechten Winkel auf $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\3\end{smallmatrix}\right)$ stehen. Damit liegt g in den Ebenen durch den Punkt $\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\-1\end{smallmatrix}\right)$, die normal auf n_1 bzw. n_2 sind. Die Gerade ist also der Durchschnitt der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} e_1: &\quad x + y = 5, \text{ und} \\ e_2: &\quad 3x - z = 7. \end{aligned}$$

Wir haben

$$g = \{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 5, 3x - z = 7\}.$$

8.4.2. *Verwandlung von impliziter Darstellung in Parameterdarstellung.* Um eine Parameterdarstellung von

$$g = \{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y + 3z = 1, x + 4y - 2z = 3\}$$

zu erhalten, lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1, \\ x + 4y - 2z &= 3. \end{aligned}$$

Eine Methode dafür werden wir im Kapitel 3 vorstellen.

KAPITEL 2

Matrizen

1. Die Definition von Matrizen

Wir haben bereits *Vektoren* kennen gelernt; solche Paare reeller Zahlen haben wir etwa benutzt, um Punkte in der Ebene zu beschreiben. In der Geometrie brauchen wir auch *Matrizen*. Matrizen eignen sich besonders gut, um etwa Drehungen oder Spiegelungen zu beschreiben.

Eine *Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema. Zunächst einige Beispiele:

Beispiele 2.1.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine 2×3-Matrix.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine 2×2-Matrix.
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine 2×1-Matrix.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ist eine 1×3-Matrix.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir als eine $m \times n$-Matrix. Wenn A eine $m \times n$-Matrix ist, und $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so bezeichnen wir mit $A(i, j)$, $A[i, j]$ oder $A_{i,j}$ den Eintrag, der bei A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte steht. Für

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

gilt zum Beispiel $A_{2,1} = 7$. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen kürzen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ ab.

Wir müssen noch den Begriff "rechteckiges Zahlenschema" klären. Man kann eine $m \times n$-Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ als Funktion von $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ nach $\mathbb{R}$ definieren. Der Eintrag, der in der 2. Zeile und 4. Spalte steht, ist dann der Funktionswert $A(2, 4)$. Diese Sichtweise gibt auch recht gut wieder, was eine Implementation des abstrakten Datentyps "Matrix" können muss. Es muss möglich sein, eine Funktion `LiefereEintrag` zu schreiben, sodass

`LiefereEintrag (A, i, j)` den Eintrag von A an der i-ten Zeile und j-ten Spalte, also den Funktionswert $A(i, j)$, zurückgibt.

In Mathematica geben wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

wie folgt ein.

$\boldsymbol{A = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}}$
$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$
MatrixForm[*A*]
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{A = \{\{5, 7, 8\}, \{-2, 3, 5\}\}}$
$\{\{5, 7, 8\}, \{-2, 3, 5\}\}$
MatrixForm[*A*]
$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
***A*[[2]][[1]]**
-2

2. Die Addition von Matrizen

Zwei Matrizen kann man addieren, wenn sie gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben. Wie man zwei Matrizen von gleichem Format addiert, erklären wir mit folgenden Beispielen.

Aufgaben 2.2.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 13 & 7 & -2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Wir fassen zusammen, wie diese Addition funktioniert: Zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ lassen sich genau dann addieren, wenn $m = n$ und $k = l$ gilt, d.h. wenn die Matrizen von gleichem Format sind. Wenn C die Matrix $A + B$ ist, dann hat auch C das Format $m \times k$, und für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots k\}$ berechnet man den Eintrag $C_{i,j}$ durch

$$C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

A = {{1, 4, 3}, {0, 1, 0}};
B = {{−7, 5, 0}, {23, −7, 16}};
A + B
{{−6, 9, 3}, {23, −6, 16}}
MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 23 & -6 & 16 \end{pmatrix}$$

3. Die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl

Eine Matrix A wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem jeder Eintrag mit der Zahl multipliziert wird. Wir geben dazu wieder ein Beispiel:

Beispiel 2.3.

$$2 * \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

Wir formulieren wieder allgemein, wie man eine reelle Zahl mit einer Matrix A multipliziert. Wenn t eine reelle Zahl, und A eine $m \times n$-Matrix ist, so ist die Matrix $C := t * A$ ebenfalls eine $m \times n$-Matrix. Die Einträge von C sind dadaurch gegeben, dass für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt:

$$C_{i,j} = t\, A_{i,j}.$$

A = {{2, 5}, {3, 4}, {10, 2}}
{{2, 5}, {3, 4}, {10, 2}}
MatrixForm[(−10) * A]

$$\begin{pmatrix} -20 & -50 \\ -30 & -40 \\ -100 & -20 \end{pmatrix}$$

4. Die Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen A, B können genau dann miteinander multipliziert werden, wenn A genausoviele Spalten wie B Zeilen hat. Eine $k \times l$-Matrix ist also mit einer $m \times n$-Matrix multiplizierbar, wenn $l = m$. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist eine $k \times n$-Matrix. Wir erklären die Matrixmultiplikation zunächst anhand eines Beispiels.

Beispiel 2.4.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot 7 & 3\cdot 9+1\cdot 8+2\cdot 1 & 3\cdot 3+1\cdot 5+2\cdot(-4) \\ 2\cdot 3+5\cdot 1+4\cdot 7 & 2\cdot 9+5\cdot 8+4\cdot 1 & 2\cdot 3+5\cdot 5+4\cdot(-4) \end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 37 & 6 \\ 39 & 62 & 15 \end{pmatrix}.$$

Wenn man eine $k \times m$-Matrix A mit einer $m \times n$-Matrix B multipliziert, so ist das Produkt C eine $k \times n$-Matrix. Für $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist der Eintrag $C_{i,j}$ das Skalarprodukt aus der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B. Wir rechnen noch einige Beispiele:

Aufgaben 2.5.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 19 \\ 23 & -13 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert, da die erste Matrix 3 Spalten und die zweite Matrix 2 Zeilen hat, und 2 nicht gleich 3 ist.

Wenn A eine 2×3 und B eine 3×1-Matrix ist, dann ist das Produkt $A \cdot B$ eine 2×1-Matrix. Das Produkt $B \cdot A$ ist nicht definiert. Selbst dann, wenn beide Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert sind, müssen die Ergebnisse nicht gleich sein. Dazu rechnen wir folgende Beispiele:

Aufgaben 2.6.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (17)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 25 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Das erste Beispiel noch einmal in Mathematica.

```
A = {{3,1,2},{2,5,4}};
B = {{3,9,3},{1,8,5},{7,1,-4}};
MatrixForm[A.B]
```

$$\begin{pmatrix} 24 & 37 & 6 \\ 39 & 62 & 15 \end{pmatrix}$$

Wir halten die Definition der Matrizenmultiplikation noch einmal genau fest:

Definition 2.7 (Matrizenmultiplikation). Sei A eine $k \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix. Dann ist das Produkt $C := A \cdot B$ eine $k \times n$-Matrix. Für $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ist der Eintrag $C[i, j]$ durch

$$C[i,j] = \sum_{r=1}^{m} A[i,r] \cdot B[r,j].$$

definiert.

5. Rechenregeln für die Addition und Multiplikation von Matrizen

Wir haben bereits gesehen, dass nicht für alle Matrizen $A \cdot B = B \cdot A$ gelten muss. Einige Rechenregeln, die wir vom Rechnen mit Zahlen kennen, gelten aber auch für Matrizen.

Satz 2.8 (Assoziativität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, und seien $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Es ist nicht schwierig, die Assoziativität der Matrizenmultiplikation zu beweisen, wenn A, B, C alle 2×2-Matrizen sind. Man berechnet

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

und
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}),$$
und stellt fest, dass beide Ergebnisse gleich sind. Für Matrizen beliebigen Formats gehen wir so vor:

Beweis von Satz 2.8: Wir beobachten, dass $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$ beides $k \times n$-Matrizen sind. Um zu zeigen, dass beide Matrizen gleich sind, zeigen wir, dass für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, dass $(A \cdot B) \cdot C\,[i, j] = A \cdot (B \cdot C)\,[i, j]$.

Seien also $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir wollen
$$(A \cdot B) \cdot C\,[i, j] = A \cdot (B \cdot C)\,[i, j] \tag{2.1}$$
zeigen. Es gilt
$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C\,[i, j] &= \sum_{r=1}^{m} (A \cdot B)[i, r] \cdot C[r, j] \\ &= \sum_{r=1}^{m} (\sum_{s=1}^{l} A[i, s] \cdot B[s, r]) \cdot C[r, j] \\ &= \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{l} A[i, s] \cdot B[s, r] \cdot C[r, j]. \end{aligned}$$
Wir berechnen nun die rechte Seite von (2.1), und erhalten
$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C)[i, j] &= \sum_{r=1}^{l} A[i, r] \cdot (B \cdot C)[r, j] \\ &= \sum_{r=1}^{l} A[i, r] \cdot (\sum_{s=1}^{m} B[r, s] \cdot C[s, j]) \\ &= \sum_{r=1}^{l} \sum_{s=1}^{m} A[i, r] \cdot B[r, s] \cdot C[s, j]) \\ &= \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=1}^{l} A[i, r] \cdot B[r, s] \cdot C[s, j]) \\ &= \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{s_1=1}^{l} A[r, s_1] \cdot B[s_1, r_1] \cdot C[r_1, j] \\ &= \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{l} A[i, s] \cdot B[s, r] \cdot C[r, j]. \end{aligned}$$

Somit gilt die Gleichung (2.1). Folglich haben $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$ also an jeder Stelle den gleichen Eintrag, und sind somit gleich. $\square$

Satz 2.9 (Rechtsdistributivität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times m}$. Dann gilt*

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C).$$

Satz 2.10 (Linksdistributivität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, und seien $A \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $B, C \in \mathbb{R}^{l\times m}$. Dann gilt*

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C).$$

Satz 2.11 (Zusammenhang zwischen zwei Multiplikationen). *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, und sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(tA) \cdot B = t(A \cdot B)$.*

6. Die Multiplikation von Vektoren und Matrizen

Sei $v = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ und $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist der Vektor $A \cdot v$ gegeben durch

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+16 \\ -2+0 \\ 2+4 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Die Multiplikation sieht also genauso aus wie die Multiplikation der 3×2-Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mit der 2×1-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$. Bei der Matrizenmultiplikation ist das Ergebnis aber eine 3×1-Matrix.

Mit Mathematica wird der Unterschied deutlich:

```
A = {{-3,4},{1,0},{-1,1}};
v = {-2,4};
x = A.v
{22, -2, 6}
A = {{-3,4},{1,0},{-1,1}};
v = {{-2},{4}};
x = A.v
{{22},{-2},{6}}
```

$A = \{\{-3,4\},\{1,0\},\{-1,1\}\};$
$v = \{\{-2,4\}\};$
$x = A.v$

Hier liefert Mathematica eine Fehlermeldung.

$\{\{-3,4\},\{1,0\},\{-1,1\}\}.\{\{-2,4\}\}$

Sei $v = (-4,3,2)$ und $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist der Vektor $v \cdot A$ gegeben durch

$$(-4,3,2) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (12+3-2,\ -20+2) = (13,-18).$$

Das Ergebnis ist ein Vektor im $\mathbb{R}^2$.

Die Multiplikation sieht also genauso aus wie die Multiplikation der 1×3-Matrix $(-4\ 3\ 2)$ mit der 3×2-Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Bei der Matrizenmultiplikation ist das Ergebnis aber eine 1×2-Matrix.

Wenn man diese Multiplikation “Matrix mal Vektor” verwendet, lassen sich lineare Gleichungssysteme kürzer anschreiben.

$$\begin{aligned} 3\,x + 4\,y - 2\,z &= 1 \\ 2\,x + 5\,y - 8\,z &= 2 \end{aligned}$$

läßt sich dann als

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

schreiben. Im allgemeinen erhält man bei m Gleichungen und n Unbekannten die Form

$$A \cdot x = b,$$

wobei A eine $m \times n$-Matrix ist, x ein Vektor im $\mathbb{R}^n$ und b ein Vektor im $\mathbb{R}^m$.

Die Funktion `LinearSolve[A,b]` liefert eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Wir lösen zum Beispiel $2\,x - 3\,y = 5$.

LinearSolve[{{2, −3}}, {5}]
$\left\{\frac{5}{2}, 0\right\}$

Später werden wir sehen, wie man alle Lösungen erhält.

7. Das Transponieren von Matrizen

Beim *Transponieren* einer Matrix wird die Matrix an der Hauptdiagonale gespiegelt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Wenn A eine $m \times n$-Matrix ist, so ist A^T eine $n \times m$-Matrix, und für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt

$$A^T(i, j) = A(j, i).$$

***A* = {{1, 4, −3}, {2, −5, 3}};**
MatrixForm[*A*]
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
***B* = Transpose[*A*]**
$\{\{1, 2\}, \{4, -5\}, \{-3, 3\}\}$
MatrixForm[*B*]
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

SATZ 2.12. *Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, und seien $B, C \in R^{m \times n}$. Dann gilt:*

(1) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
(2) $(B + C)^T = B^T + C^T$

ÜBUNGSAUFGABEN 2.13.

(1) Berechnen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

die Matrix $B := A^T \cdot A$.

(2) Berechnen Sie $(A - B) \cdot C^T$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Finden Sie eine Matrix X, sodaß $A \cdot X = B$, wobei $A = \left(\begin{smallmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} -4 & -8 \\ 7 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. (Hinweis: Bestimmen Sie jede Spalte von X durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.)

8. Die Einheitsmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Einheitsmatrix vom Format $n \times n$. Man sieht leicht, daß für jede $m \times n$-Matrix A und jede $n \times k$-Matrix B gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot E_n &= A, \\ E_n \cdot B &= B. \end{aligned}$$

Besonders einfach zu lösen sind Gleichungssysteme mit der Einheitsmatrix: Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat die Lösung $x = 4$, $y = 2$, und daher die Lösungsmenge $L = \{(4, 2)\}$.

```
A = -24 * IdentityMatrix[5];
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

9. Das Invertieren von Matrizen

Betrachtet man die Gleichung $5\,x = 7$, so erhält man die Lösung $x = \frac{7}{5}$ durch Multiplikation beider Seiten mit $\frac{1}{5}$ (des Inversen von 5). Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Seien wir nun optimistisch, und stellen wir uns vor, wir haben eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sodass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Lösungen des Gleichungssystems muss dann auch gelten:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie bestimmen wir so eine Matrix A? Wir suchen eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2\,a + 5\,b &= 1 \\ 3\,a - 5\,b &= 0 \\ 2\,c + 5\,d &= 0 \\ 3\,c - 5\,d &= 1 \end{aligned}$$

Lösen wir dieses, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,12 \\ 0,2 & -0,08 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir auch die Lösung des ursprünglichen Systems berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(0,4)$ der einzige Kandidat für eine Lösung des Systems. Da $(0,4)$ auch wirklich Lösung ist, ergibt sich als Lösungsmenge $L = \{(0,4)\}$.

Definition 2.14. Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$. A heißt *invertierbar*, falls es eine $n \times n$-Matrix B mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$ gibt.

Satz 2.15. *Seien A_1, A_2 invertierbare Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist auch $A_1 \cdot A_2$ invertierbar.*

Beweis. Seien A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Es gibt daher Matrizen B_1, B_2, sodass $A_1 \cdot B_1 = B_1 \cdot A_1 = E_n$ und $A_2 \cdot B_2 = B_2 \cdot A_2 = E_n$. Dann gilt $(A_1 \cdot A_2) \cdot (B_2 \cdot B_1) = A_1 \cdot (A_2 \cdot B_2) \cdot B_1 = A_1 \cdot E_n \cdot B_1 = A_1 \cdot B_1 = E_n$. Somit ist $A_1 \cdot A_2$ invertierbar. □

Satz 2.16. *Sei A eine invertierbare Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, und sei B so, dass $A \cdot B = B \cdot A = E_n$. Sei C eine Matrix mit $A \cdot C = E_n$. Dann gilt $B = C$.*

Beweis. Es gilt $C = E_n \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C) = B \cdot E_n = B$. □

Zu jeder invertierbaren Matrix A gibt es also genau eine Matrix B mit $A \cdot B = E_n$. Diese Matrix B kürzen wir mit A^{-1} ab.

Definition 2.17. Sei A eine $n \times n$-Matrix. A ist *regulär* genau dann, wenn A invertierbar ist. A ist *singulär* genau dann, wenn A nicht invertierbar ist.

Übungsaufgaben 2.18.

(1) Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar ist, und dass
$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$$
gilt.

(2) Sei A eine $m \times m$- Matrix, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt, und sei E die $m \times m$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist. *Hinweis:* Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

SATZ 2.19. *Seien* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbare Matrizen.*

(1) A^{-1} *ist invertierbar, und es gilt* $(A^{-1})^{-1} = A$.
(2) A^T *ist invertierbar, und es gilt* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
(3) $A \cdot B$ *ist invertierbar, und es gilt* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

BEWEIS. (1) Es gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$. Also ist A^{-1} invertierbar, und $B := A$ ihre inverse Matrix.
(2) Es gilt $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$. Durch Transponieren erhält man $(A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = E_n$. Folglich ist A^T invertierbar, und die inverse Matrix zu A^T ist $(A^{-1})^T$.
(3) Es gilt $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = E_n$ und $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = E_n$. Folglich ist $A \cdot B$ invertierbar, und die inverse Matrix von $A \cdot B$ ist $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

□

Der folgenden Satz lä sst sich mit den uns an dieser Stelle zur Verfügung stehenden Begriffen nicht so einfach beweisen. Da er aber sehr nützlich ist, führen wir ihn schon jetzt an.

SATZ 2.20. *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *und sei* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *so, dass* $A \cdot B = E_n$. *Dann ist* A *invertierbar. Außerdem ist dann* B *die zu* A *inverse Matrix.*

Wir berechnen jetzt die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A = {{1, 3}, {2, −4}};
LinearSolve[A, {1, 0}]
$\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

Also $a = 0.4, c = 0.2$.

A = {{1, 3}, {2, −4}};
LinearSolve[A, {0, 1}]
$\left\{\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right\}$

Also $b = 0.3$, $d = -0.1$.

Die Funktion `Inverse` berechnet die inverse Matrix; die Funktion `^(-1)` macht leider etwas ganz anderes.

$\boldsymbol{A = \{\{1,3\},\{2,-4\}\};}$
$\boldsymbol{B = \mathrm{Inverse}[A];}$
$\boldsymbol{\mathrm{MatrixForm}[B]}$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A.B}$
$\{\{1,0\},\{0,1\}\}$
$\boldsymbol{B.A}$
$\{\{1,0\},\{0,1\}\}$
$\boldsymbol{A\hat{}(-1)}$
$\left\{\left\{1,\frac{1}{3}\right\},\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right\}\right\}$
$\boldsymbol{A.A\hat{}(-1)}$
$\left\{\left\{\frac{5}{2},-\frac{5}{12}\right\},\left\{0,\frac{5}{3}\right\}\right\}$

KAPITEL 3

Lineare Gleichungssysteme

1. Beispiele

Wir betrachten zunächst vier Gleichungssysteme und bestimmen ihre Lösungsmenge. Dabei geht es uns noch nicht darum, ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme zu entwickeln (das kommt später), sondern nur darum, ein paar typische Phänomene zu beobachten.

(1) Man bestimme alle Paare (x, y) in $\mathbb{R}^2$, die sowohl die Gleichung $x + y = -1$ als auch die Gleichung $3\,x + 2\,y = -5$ erfüllen. Wir suchen also alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y &= -1 \qquad (1) \\ 3\,x + 2\,y &= -5 \qquad (2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lösung: Wenn $\binom{x}{y}$ eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt $x + y = -1$. Daher gilt auch $-3\,x - 3\,y = 3$. Somit ist jede Lösung des Systems (3.1) auch eine Lösung von

$$\begin{aligned} -3\,x - 3\,y &= 3 \qquad (1') \\ 3\,x + 2\,y &= -5 \qquad (2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wenn $-3\,x - 3\,y = 3$ und $3\,x + 2\,y = -5$, dann gilt auch $(-3\,x - 3\,y) + (3\,x + 2\,y) = 3 + (-5)$, also $-y = -2$. Daher muss $y = 2$ sein. Da aber $x + y = -1$ ist, muss $x = -1 - y$ sein, und daher ist $x = -3$. Daher ist nur $\binom{-3}{2}$ als Lösung des Gleichungssystems möglich.

Wir probieren nun aus, ob $\binom{-3}{2}$ auch wirklich eine Lösung ist. Tatsächlich gilt $-3 + 2 = -1$ und $3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = -5$. Daher ist die Menge

$$L = \{\tbinom{-3}{2}\}$$

die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Jene Punkte $\binom{x}{y}$ im $\mathbb{R}^2$, die die Gleichung $x + y = -1$ erfüllen, liegen auf einer Geraden (eben auf der Geraden mit Gleichung $x + y = -1$). Jene Punkte $\binom{x}{y}$, die die Gleichung $3\,x + 2\,y = -5$ erfüllen, liegen auf der Geraden mit

Gleichung $3\,x + 2\,y = -5$. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält alle Punkte, die auf beiden Geraden liegen. Wenn die beiden Geraden nicht parallel sind, so gibt es genau einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt, nämlich den Schnittpunkt der beiden Geraden. Dieser Schnittpunkt ist in diesem Beispiel der Punkt $\binom{-3}{2}$.

(2) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 3\,y &= -1 && (1)\\ -3\,x - 9\,y &= 2 && (2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Lösung: Wenn $\binom{x}{y}$ eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt $x + 3\,y = -1$. Daher gilt auch $3\,x + 9\,y = -3$. Somit ist jede Lösung des Systems (3.3) auch eine Lösung von

$$\begin{aligned} 3\,x + 9\,y &= -3 && (1')\\ -3\,x - 9\,y &= 2 && (2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wenn $3\,x + 9\,y = -3$ und $-3\,x - 9\,y = 2$, dann gilt auch

$$(3\,x + 9\,y) + (-3\,x - 9\,y) = -3 + 2. \tag{3.5}$$

Die linke Seite von (3.5) ist aber immer 0. Jede Lösung $\binom{x}{y}$ des Gleichungssystems (3.3) muss also $0 = -3 + 2$, also $0 = -1$ erfüllen. Egal welche x, y man in die Gleichung (3.5) einsetzt: die Gleichung (3.5) kann nie erfüllt sein.

Somit hat das Gleichungssystem (3.3) keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge, also

$$L = \{\} = \varnothing.$$

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Die Gerade $x + 3\,y = -1$ hat den Normalvektor $\binom{1}{3}$. Die Gerade $-3\,x - 9\,y = 2$ hat den Normalvektor $\binom{-3}{-9}$. Der Vektor $\binom{-3}{-9}$ ist ein Vielfaches des Vektors $\binom{1}{3}$. Die beiden Geraden sind also parallel. Zwei parallele Geraden sind entweder identisch, oder sie haben keinen gemeinsamen Punkt. Da das Gleichungssystem (3.3) unlösbar ist, haben die beiden Geraden keinen gemeinsamen Punkt; sie sind also zwei verschiedene parallele Geraden.

(3) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 5\,y &= -4 && (1)\\ -2\,x - 10\,y &= 8 && (2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Lösung: Wenn $\binom{x}{y}$ eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt $x + 5\,y = -4$. Daher gilt auch $2\,x + 10\,y = -8$. Somit ist jede Lösung des

Systems (3.6) auch eine Lösung von

$$\begin{aligned} 2\,x + 10\,y &= -8 \qquad (1') \\ -2\,x - 10\,y &= 8 \qquad (2). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wenn $2\,x + 10\,y = -8$ und $-2\,x - 10\,y = 8$, dann gilt auch

$$(2\,x + 10\,y) + (-2\,x - 10\,y) = -8 + 8. \tag{3.8}$$

Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung (3.8) ist also 0. Somit ist die Gleichung (3.8) für alle $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}^2$ erfüllt. Sie liefert also keine Einschränkung für die Lösungen.

Nicht jeder Punkt $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}^2$ ist eine Lösung des Systems (3.6). (Der Punkt $\binom{0}{0}$ erfüllt nicht einmal die erste Gleichung.) Wir sehen aber, dass jede Lösung der ersten Gleichung von (3.6) auch eine Lösung der zweiten Gleichung von (3.6) ist: das liegt daran, dass die zweite Gleichung entsteht, wenn man beide Seiten der ersten Gleichung mit -2 multipliziert. Man kann also die zweite Gleichung einfach weglassen (sie liefert keine weitere Einschränkung für x und y), und nur mehr die Lösungen von

$$x + 5\,y = -4$$

bestimmen. Wir sehen, dass wir für jeden Wert, den wir für y vorgeben, einen Wert für x erhalten. Wenn wir für $y := t$ setzen, erhalten wir für x den Wert $x = -4 - 5\,t$. Somit können wir die Lösungsmenge L so angeben:

$$L = \{\binom{-4-5\,t}{t} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Lösungsmenge L ist also eine Gerade durch $\binom{-4}{0}$ mit Richtungsvektor $\binom{-5}{1}$.

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Die Gleichungen $x + 5\,y = -4$ und $-2\,x - 10\,y = 8$ werden von denselben $\binom{x}{y}$ erfüllt. Sie beschreiben also die gleiche Gerade. Der Schnitt dieser beiden Geraden miteinander ist also genau diese eine Gerade. Und wirklich: $X = \binom{-4}{0} + t \cdot \binom{-5}{1}$ ist genau die Parameterdarstellung der Geraden $x + 5\,y = -4$.

(4) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3\,x + 4\,y &= -1 \qquad (1) \\ 5\,x + 10\,y &= -5 \qquad (2) \\ 2\,x + 8\,y &= -6 \qquad (3). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lösung: Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit 5, und die Gleichung (2) mit -3 und erhalten

$$\begin{aligned} 15\,x + 20\,y &= -5 && (1') \\ -15\,x - 30\,y &= 15 && (2') \\ 2\,x + 8\,y &= -6 && (3). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jede Lösung von $(1')$ und $(2')$ erfüllt auch

$$(15\,x + 20\,y) + (-15\,x - 30\,y) = -5 + 15,$$

also $-10\,y = 10$, und somit $y = -1$. Wenn $y = -1$, dann muss wegen der Gleichung (1) gelten:

$$3\,x = -1 - 4\,y,$$

also $3\,x = -1 + 4$, und somit $x = 1$.

Die Frage ist, ob $\binom{1}{-1}$ auch wirklich eine Lösung des Gleichungssystems ist. Wir haben bis jetzt ja nur so begründet, dass für jede Lösung $\binom{x}{y}$ des Gleichungssystems $x = 1$ und $y = -1$ gelten muss. Wir wissen aber noch nicht, ob $\binom{1}{-1}$ die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt. So haben wir etwa die Gleichung (3) beim Ausrechnen von x und y noch gar nicht verwendet! Wir müssen also ausprobieren, ob $\binom{1}{-1}$ wirklich alle drei Gleichungen erfüllt. Es gilt $3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -1$, $5 \cdot 1 + 10 \cdot (-1) = -5$ und $2 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) = -6$. Das Paar $\binom{1}{-1}$ erfüllt also wirklich alle drei Gleichungen, und es gilt somit

$$L = \{\tbinom{1}{-1}\}.$$

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Von den drei Geraden, die durch die Gleichungen (1), (2) und (3) beschrieben werden, sind keine zwei parallel, da kein Normalvektor ein Vielfaches eines anderen Normalvektors ist. Alle drei Geraden gehen durch den Punkt $\binom{1}{-1}$. Die drei Geraden gehen also "sternförmig" durch den Punkt $\binom{1}{-1}$.

Das Gleichungssystem (3.6) zeigt, dass die Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems nicht leer oder einelementig sein muss, sondern auch eine unendliche Menge sein kann. Für die Darstellung der Lösungsmenge L des Systems (3.6) gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) *Implizite Darstellung* der Lösung: Jedes Paar (x, y), das $x + 5\,y = -4$ erfüllt, ist auch eine Lösung für das gesamte Gleichungssystem. Die Lösung kann also in der Form

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5\,y = -4\}$$

geschrieben werden.

(2) *Parametrisierte Darstellung* der Lösung: Wir können die Lösungsmenge als

$$L = \{(-4, 0) + t \cdot (-5, 1) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

schreiben.

Wollen wir nun überprüfen, ob das Paar $(3, 4)$ in der Lösungsmenge liegt, so müssen wir bei impliziter Darstellung nur $x = 3$ und $y = 4$ in $x + 5\,y$ einsetzen. Da wir dabei 23 und nicht -4 erhalten, folgt $(3, 4) \notin L$. Bei parametrisierter Darstellung müssen wir dazu das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4 - 5\,t &= 3 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

lösen. Aus der Tatsache, dass dieses System keine Lösung besitzt, können wir $(3, 4) \notin L$ schließen.

Die implizite Darstellung lässt jedoch keine direkte geometrische Interpretation zu, während man aus der parametrisierten Darstellung sofort erkennt, dass es sich bei der Lösungsmenge um eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ mit der Steigung $-\frac{1}{5}$ handelt.

Auch andere Kurven im $\mathbb{R}^2$ lassen sich sowohl implizit als auch parametrisiert darstellen. So ist zum Beispiel der Kreis mit Radius 1 um den Ursprung gegeben durch

$$\begin{aligned} K &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \\ &= \{(\cos t, \sin t) \,|\, t \in \mathbb{R},\, 0 \leq t < 2\pi\}. \end{aligned}$$

Wir werden uns überlegen, wie wir die Lösungsmenge von einer Darstellungsform in die andere umrechnen können. Die jeweiligen Übergänge nennt man *Parametrisieren* (*Lösen*) bzw. *Implizitisieren*.

2. Die Lösung von Gleichungssystemen in Staffelform

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(3.11) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem können wir so lösen: x_5 können wir beliebig festlegen. Wir setzen also

$$x_5 = t.$$

Wir erhalten

$$-16\,x_4 + 8\,t = 16,$$

also

$$x_4 = -1 + \frac{1}{2}\,t.$$

Da x_3 frei wählbar ist, setzen wir x_3 auf s.

Dann erhalten wir

$$x_2 = 5 + 2\,x_3 + 4\,x_4 - 2\,x_5,$$

also

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 + 2\,s - 4 + 2\,t - 2\,t \\ x_2 &= 1 + 2\,s. \end{aligned}$$

Schließlich

$$x_1 = -2 + 2\,s + t.$$

Also ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine besonders angenehme Koeffizientenmatrix. Sie ist nämlich in *Zeilenstaffelform*. Wir definieren:

Definition 3.1. Sei A eine $m \times n$-Matrix. A ist in *Zeilenstaffelform*, wenn es $r \in \mathbb{N}_0$ und $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass

(1) $j_r > j_{r-1} > \cdots > j_1$.
(2) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ gilt: $A(i, j_i) \neq 0$.
(3) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ und für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $k < j_i$ gilt: $A(i, k) = 0$.
(4) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i > r$ und für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt: $A(i, k) = 0$.

Wenn A eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstaffelform ist, und r wie in obiger Definition, dann treten in der Lösung von $A \cdot x = 0$ genau $n - r$ frei wählbare Parameter auf.

Übungsaufgaben 3.2.

(1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Geben Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an.

(2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Geben Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an.

(3) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:
$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 1\,x_2 + 1\,x_3 - 1\,x_4 + 1\,x_5 &= 12 \\ 1\,x_2 + 1\,x_3 - 1\,x_4 + 1\,x_5 &= 4 \\ 1\,x_3 + 0\,x_4 - 1\,x_5 &= 14. \end{aligned}$$

(4) Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

3. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Wenn die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems Zeilenstaffelform hat, dann wissen wir bereits, wie wir alle Lösungen des Gleichungssystems bestimmen. Wir erklären mit einem Beispiel, wie wir sonst vorgehen. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Wir schreiben uns zunächst das System anders auf.

I	1	-5	8	2	-2	-9
II	1	-4	6	-2	0	-4
III	-1	0	2	2	0	0
IV	5	-8	6	0	-5	-18

Wir addieren nun passende Vielfache der Gleichung I zu jeder der anderen Gleichungen, sodass in den neuen Gleichungen die Variable x_1 nicht mehr vorkommt. Das führt auf

(3.13)

II'	0	1	-2	-4	2	5	$-I+II$
III'	0	-5	10	4	-2	-9	$I+III$
IV'	0	17	-34	-10	5	27	$(-5)\cdot I+IV$

Nun hat das Gleichungssystem, das aus den Gleichungen I,II,III,IV besteht, die gleiche Lösungsmenge wie das Gleichungssystem, das aus den Gleichungen I,II',III',IV' besteht.

Das kann man so begründen: wenn ein Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ die Gleichungen I und IV erfüllt, dann erfüllt es auch die Gleichung IV', die ja eine Linearkombination (= Summer von Vielfachen) der Gleichungen I und IV ist. Sei nun $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ein Tupel, das die Gleichungen I und IV' erfüllt. Da IV' = −5· I + IV, gilt IV = IV' + 5· I. Daher ist die Gleichung IV eine Linearkombination der Gleichungen IV' und I. Also muss das Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ auch die Gleichung IV erfüllen.

Wir können also anstelle des Gleichungssystems I,II,III,IV das Gleichungssystem I,II',III',IV' lösen. In den Gleichungen II', III', IV' kommt die Variable x_1 nicht vor. Also können wir so vorgehen: wir bestimmen die Lösungen (x_2, x_3, x_4, x_5) der Gleichungen II', III', IV'. Für jede dieser Lösungen rechnen wir uns dann aus der Gleichung I den Wert von x_1 aus.

Um die Lösungen von II', III', IV' zu bestimmen, addieren wir wieder passende Vielfache der Gleichung II' zu III' und IV'. Wir erhalten

(3.14)

III''	0	0	0	-16	8	16	$5\cdot II'+III'$
IV''	0	0	0	58	-29	-58	$(-17)\cdot II'+IV'$

Nun können wir alle Lösungen (x_3, x_4, x_5) der Gleichungen III" und IV" bestimmen. Dann können wir für jede Lösung aus II' den Wert von x_2 bestimmen (und dann aus I den Wert von x_1).

In den Gleichungen III" und IV" kommt x_3 nicht vor. Wenn wir also eine Lösung (x_4, x_5) für die Gleichungen III" und IV" finden, dann können wir für x_3 jede beliebige Zahl einsetzen. Für jede solche Setzung erhalten wir eine Lösung (x_3, x_4, x_5) von III" und IV". Wir merken uns:

x_3 ist frei wählbar,

sofern es Lösungen (x_4, x_5) für III" und IV" gibt. Jetzt versuchen wir, alle Lösungen (x_4, x_5) von III" und IV" zu finden. Dazu addieren wir ein passendes Vielfaches der Gleichung III" zur Gleichung IV". Wir erhalten

$$\begin{array}{cccccccc} IV''' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 58 \cdot III'' + 16 \cdot IV'' \\ \hline \end{array} \tag{3.15}$$

Alle Lösungen (x_5) dieser letzten Gleichung zu finden, ist einfach: wir können jeden Wert für x_5 einsetzen. Also:

x_5 ist frei wählbar.

Setzen wir also x_5 auf t, und schauen wir, welche Werte sich für die anderen Variablen ergeben.

Aus der Gleichung III" erhalten wir

$$-16\,x_4 + 8\,t = 16,$$

also

$$x_4 = -1 + \frac{1}{2}\,t.$$

Da x_3 frei wählbar ist, setzen wir x_3 auf s.

Aus der Gleichung II' erhalten wir

$$x_2 = 5 + 2\,x_3 + 4\,x_4 - 2\,x_5,$$

also

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 + 2\,s - 4 + 2\,t - 2\,t \\ x_2 &= 1 + 2\,s. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung I erhalten wir schließlich

$$x_1 = -2 + 2\,s + t.$$

Also ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \}.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 3.3.

(1) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2\,y + 3\,z &= -10 \\ -x + 7\,y + 2\,z &= -10 \\ 5\,x - 8\,y + 5\,z &= -10. \end{aligned}$$

(2) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -4\,x + 2\,y + 3\,z &= 12 \\ -6\,x + 3\,y + 0\,z &= -18 \\ 6\,x - 3\,y + 2\,z &= 34 \end{aligned}$$

(3) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1\,x + 0\,y + 2\,z &= 16 \\ 2\,x + 3\,y - z &= -8 \\ 0\,x + 2\,y - 3\,z &= -36 \end{aligned}$$

(4) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in parametrisierter Form an!

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 8 \\ 2 & -3 & 8 & 0 \\ 10 & -7 & 24 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ 112 \end{pmatrix}.$$

(5) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in parametrisierter Form an!

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 8 \\ 10 & -7 & -16 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 56 \end{pmatrix}$$

(6) Ergänzen Sie die Gleichung

$$3\,x - 2\,y + 5\,z = 0$$

so zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen, dass das System
  (a) keine Lösung
  (b) genau eine Lösung
  (c) genau zwei Lösungen
  (d) eine Gerade als Lösungsmenge
  (e) eine Ebene als Lösungsmenge

hat.

(7) Für zwei Goldbarren und acht Silbertaler erhalten Sie 69.000.– Schilling, für 7 Barren und 3 Taler 84.000.– Schilling. Wieviel ist ein Goldbarren wert? Wieviel ist ein Silbertaler wert?

(8) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 67 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

(9) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 14 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(10) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem, und geben Sie die Lösungsmenge paramtrisiert an!

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ -28 \end{pmatrix}.$$

(11) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem, und geben Sie die Lösungsmenge paramtrisiert an!

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

(12) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem, und geben Sie die Lösungsmenge paramtrisiert an!

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(13) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem, und geben Sie die Lösungsmenge paramtrisiert an!

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 67 \\ 21 \end{pmatrix}$$

(14) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem, und geben Sie die Lösungsmenge paramtrisiert an!

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 68 \\ 22 \end{pmatrix}$$

(15) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem, und geben Sie die Lösungsmenge paramtrisiert an!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

KAPITEL 4

Unterräume des $\mathbb{R}^n$

1. Die Definition eines Unterraums

Mengen, mit denen man so rechnen kann wie mit Vektoren, werden wir als *Vektorräume* bezeichnen. Wir behandeln zunächst den für die Geometrie wichtigsten Vektorraum, nämlich $\mathbb{R}^3$, und, in Verallgemeinerung davon, für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Vektorraum

$$\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \}.$$

Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ schreiben wir $x(i)$, $x[i]$, und x_i für den i-ten Eintrag von x.

Manche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen bezüglich der Addition von Vektoren und der Multiplikation mit reellen Zahlen. Solche Teilmengen bezeichnen wir als *Unterräume* des $\mathbb{R}^n$.

Definition 4.1. $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *Unterraum* des $\mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow$

(1) Die Menge T enthält zumindest ein Element.
(2) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle $t \in T$ gilt $\lambda\, t \in T$.
(3) Für alle $s, t \in T$ gilt $s + t \in T$.

Wir geben einige Beispiele von Unterräumen des $\mathbb{R}^n$:

Beispiele 4.2.

(1) $T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,x - 3\,y = 0\}$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^2$. Begründung: Wegen $(0, 0) \in T_1$ ist die Menge T_1 nicht leer. Sei $(u, v) \in T_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $2\,u - 3\,v = 0$ und damit $2\,(\lambda\, u) - 3\,(\lambda\, v) = 0$, also gilt $\lambda \cdot (u, v) \in T_1$. Für $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in T_1$ gilt $2 \cdot (u_1 + u_2) - 3 \cdot (v_1 + v_2) = 2\,u_1 - 3\,v_1 + 2\,u_2 - 3\,v_2 = 0$, also ist $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) \in T_1$.
Damit haben wir gezeigt, dass T_1 ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

(2) $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3\,x + 2\,y = 1\}$ ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^2$, denn $(1,-1) \in T_2$, aber $2 \cdot (1,-1) \notin T_2$.
(3) $T_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\,$ es gibt $s,t \in \mathbb{R}$, sodass $(x,y,z) = s \cdot (1,-2,4) + t \cdot (0,1,8)\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
(4) $T_4 = \{(0,0)\}$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
(5) $T_5 = \{(0,1)\}$ ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^2$, da $2 \cdot (0,1) \notin T_5$.

ÜBUNGSAUFGABEN 4.3.

(1) Vervollständigen Sie die folgenden Begründungen dafür, dass die Menge
$$T = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \,|\, \text{ es gibt } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ sodass } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$$
die Unterraumeigenschaften (V1) und (V2) erfüllt.
  (a) T ist nicht die leere Menge, weil ________________________.
  (b) *Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $t \in T$ liegt $\lambda \cdot t$ in T:* Wir fixieren t aus T und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass ____________________ in ______ liegt. Da t in T liegt, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $t = \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Um zu zeigen, dass $\lambda \cdot t$ in T liegt, müssen wir ein $\alpha' \in \mathbb{R}$ finden, sodass
$$\lambda \cdot t = \alpha' \cdot \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$
  Nun wissen wir, dass $t = \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist. Daher gilt $\lambda \cdot t =$ ____________________. Das heißt, dass für $\alpha' =$ ____________ gilt:
$$\lambda \cdot t = \alpha' \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$
  Daher liegt auch ____________________ in T.

(2) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.
  (a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3\,x + 2\,y = 0\}$.
  (b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3\,x + 2\,y = 1\}$.
(3) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.
  (a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists \lambda \in \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\}$.
  (b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists \lambda \in \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -12 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\}$.
(4) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.
  (a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 3\,y \leq 0\}$.
  (b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4 + y^2 = 0\}$.
(5) Zeigen Sie: Wenn ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$) zwei Punkte enthält, so enthält er bereits die gesamte Verbindungsgerade.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit rechter Seite $= 0$ ist immer ein Unterraum.

SATZ 4.4. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.*

BEWEIS. Sei $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$.

(1) Wegen $0 \in U$ ist U nicht die leere Menge.
(2) Sei $x \in U, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $0 = \lambda\,(A \cdot x) = A \cdot (\lambda\, x)$, also $\lambda\, x \in U$.
(3) Seien $u, v \in U$. Dann gilt $A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v = 0$, d.h. $u + v \in U$.

Somit ist U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. $\square$

BEISPIEL 4.5. Wir bestimmen diesen Unterraum für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Als Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$ erhalten wir

$$L = \{(-2\,t, -3\,t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Die lineare Hülle von Vektoren

DEFINITION 4.6. Sei $m \in \mathbb{N}_0$, und seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$L(v_1, \dots, v_m) := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

heißt die *lineare Hülle* der Vektoren $v_1, \dots, v_m$.

$L(\binom{3}{2})$ ist also die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch $\binom{0}{0}$ und $\binom{6}{4}$ geht. $L(\,)$ definiert man als $\{\vec{0}\}$.

Die lineare Hülle von $v_1, \dots, v_m$ ist der kleinste Unterraum, der $v_1, \dots, v_m$ enthält:

SATZ 4.7. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \dots, v_m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

(1) *$L(v_1, \dots, v_m)$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.*
(2) *Sei M ein Unterraum der $v_1, \dots, v_m$ enthält. Dann gilt $L(v_1, \dots, v_m) \subseteq M$.*

Wollen wir etwa überprüfen, ob z.B. $(3, 0, 1)$ in der linearen Hülle von $(2, 1, -3)$ und $(7, 2, -5)$ liegt, müssen wir ein Gleichungssystem lösen:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{das heißt} \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen wir dieses System, so erhalten wir $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Also ist $(3, 0, 1)$ eine Linearkombination von $(2, 1, -3)$ und $(7, 2, -5)$, und liegt somit in der linearen Hülle dieser beiden Vektoren.

Satz 4.8. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, seien $b_1, b_2, \ldots, b_m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, und sei $\overline{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ die Matrix mit den Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_m$ als Spaltenvektoren. Dann liegt v genau dann in $L(b_1, \ldots, b_m)$, wenn das Gleichungssystem $\overline{B} \cdot x = v$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^m$ hat.*

Übungsaufgaben 4.9.

(1) Liegt $\binom{2}{-1}$ in der linearen Hülle von $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{2}$, $\binom{-2}{-4}$?
(2) Liegt $\binom{1}{-5}$ in der linearen Hülle von $\binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \binom{1}{4}$?
(3) Testen Sie, ob $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$) liegt.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, und sei M eine (möglicherweise unendliche) Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die lineare Hülle von M als

$$L(M) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot m_i \,|\, k \in \mathbb{N}_0,\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\, m_1, \ldots, m_k \in M\}.$$

Die lineare Hülle von M ist also die Menge aller Linearkombinationen endlich vieler Vektoren aus M.

Definition 4.10. Für eine $m \times n$-Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ definieren wir ihren *Zeilenraum* $Z(A)$ als die lineare Hülle der Zeilen von A. Der Zeilenraum ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Den *Spaltenraum* $S(A)$ definieren wir als die lineare Hülle der Spalten von A. Der Spaltenraum ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$.

Den *Nullraum* $N(A)$ definieren wir als die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$. Er ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

3. Die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Definition 4.11. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \ldots, v_m$ in R^n. Die Folge $(v_1, \ldots, v_m)$ heißt *linear unabhängig*, wenn für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = 0$$

gilt, dass alle $\lambda_i = 0$ sind.

Man sagt dann oft auch einfach, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind. Als Spezialfall definiert man noch für $m = 0$, dass die Folge () aus 0 Vektoren immer linear unabhängig ist.

Vektoren $v_1, \ldots, v_m$, die nicht linear unabhängig sind, nennt man *linear abhängig.* Die Folge $(v_1, \ldots, v_m)$ ist also genau dann linear abhängig, wenn es $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ gibt, sodass $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i = 0$.

Beispiel 4.12. Sind $(3, 2)$ und $(1, 3)$ linear unabhängig ?

Lösung. Wir betrachten

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses System besitzt nur die Lösung $(0, 0)$. Daher sind die beiden Vektoren linear unabhängig.

Beispiel 4.13. Sind $(3, 2)$, $(1, 4)$ und $(5, 3)$ linear unabhängig ?

Lösung. Hier erhalten wir

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des Gleichungssystems ist $\lambda_1 = -1.7$, $\lambda_2 = 0.1$ und $\lambda_3 = 1$. Die drei Vektoren sind also linear abhängig.

Satz 4.14. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, seien $b_1, b_2, \ldots, b_m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, und sei $\overline{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ die Matrix mit den Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_m$ als Spaltenvektoren. Dann sind $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ genau dann linear abhängig, wenn das System $\overline{B} \cdot x = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ hat.*

Satz 4.15. *Sei $m \geq 1$ und seien $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:*

(1) *$(b_1, \ldots, b_m)$ ist linear abhängig.*
(2) *Es gibt ein $k \in \{1, \ldots, m\}$, sodass b_k in $L(b_1, \ldots, b_{k-1})$ liegt.*

Satz 4.16. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \ldots, v_m, v \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind. Dann sind äquivalent:*

(1) *$v \in L(v_1, \ldots, v_m)$.*
(2) *$(v_1, \ldots, v_m, v)$ ist linear abhängig.*

Übungsaufgaben 4.17.

(1) Zeigen Sie, dass die Vektoren $(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix})$ linear abhängig sind, indem Sie eine Linearkombination finden, bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird, und die trotzdem den Nullvektor ergibt.

(2) Testen Sie jeweils, ob folgende Mengen von Vektoren linear abhängig sind. Finden Sie, falls die Vektoren linear abhängig sind, eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, und bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird.
   (a) $\binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \binom{1}{4}$.
   (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(3) Sind $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -25 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

(4) Sind die Vektoren $(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix})$ linear abhängig?

(5) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ an, sodass $\binom{-1}{3}$ und v linear abhängig sind.

(6) Finden Sie drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (b, c) linear unabhängig und (a, b, c) linear abhängig sind.

(7) Vervollständigen Sie die Begründung für folgende Aussage.

   Seien $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$ so, dass w in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt. Dann sind (v_1, v_2, w) linear abhängig.

   Begründung: Da w in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt, gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$w = \underline{\hspace{8cm}}.$$

   Daher gilt

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \underline{\hspace{2cm}} = 0.$$

   Das ist eine Linearkombination, die 0 ergibt, obwohl nicht jeder Vektor ____________ mal genommen wurde. Daher sind (v_1, v_2, w) ________________.

4. Basen eines Vektorraums

4.1. Definition.

Definition 4.18. Sei T Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Die Folge $B = (b_1, \ldots, b_m)$ heißt Basis von T $:\Leftrightarrow$

(1) $(b_1, \ldots, b_m)$ ist linear unabhängig,
(2) $L(b_1, \ldots, b_m) = T$.

Wir geben einige Beispiele:

Beispiel 4.19.

(1) $\{(1,0),(0,1)\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$: Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lässt sich als

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben, und liegt somit in der linearen Hülle von $(1,0)$ und $(0,1)$. Somit ist die lineare Hülle der Vektoren $\{(1,0),(0,1)\}$ der ganze $\mathbb{R}^2$. Die beiden Vektoren sind außerdem linear unabhängig.

(2) $\{(2,3)\}$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^2$, da es kein λ gibt, sodass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(3) $\{(2,3)\}$ ist Basis von $L((2,3))$.

Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann ist eine Basis eine Möglichkeit, die Menge U anzugeben. Mathematica nutzt das, um die Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ durch die Funktion `NullSpace` auszugeben. Dabei wird die (möglicherweise unendliche) Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot x = 0\}$ durch eine Basis dieses Raums angegeben.

Wir können Unterräume des $\mathbb{R}^n$ auf zwei Arten angeben.

- explizit, das heißt, als lineare Hülle von Vektoren.
- implizit, das heißt, durch ein Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge der anzugebende Unterraum ist.

Übungsaufgaben 4.20.

(1) Finden Sie eine Basis B der Ebene $L(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$, die weder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ noch $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält.

(2) Finden Sie eine Basis C der Ebene $e = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 4z = 0\}$.

5. Bestimmen der Basis eines explizit gegebenen Unterraums

Wir überlegen uns als erstes, wie wir eine Basis eines explizit gegebenen Unterraums berechnen können. Dazu berechnen wir die Basis des Raums

$$V = L(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -33 \\ 17 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 85 \\ -44 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Wir wollen also eine Basis des Zeilenraums der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ -33 & 17 & 1 & -1 \\ 85 & -44 & -3 & 2 \\ -19 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Der Zeilenraum ändert sich nicht, wenn wir eine Zeile mit einer von 0 verschiedenen Zahl multiplizieren, oder wenn wir zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addieren. Wir können uns also jetzt systematisch Matrizen erzeugen, die alle den gleichen Zeilenraum haben wie die ursprüngliche Matrix. Das machen wir mit Mathematica.

Wir haben also eine Matrix in Zeilenstaffelform erzeugt, deren Zeilenraum der gleiche wie der Zeilenraum der gegebenen Matrix ist.

ALGORITHMUS 4.21 (Zeilenstaffelform).
Eingabe: Eine $m \times n$-Matrix A.
Ausgabe: Eine $m \times n$-Matrix B, sodass B in Zeilenstaffelform ist, und $Z(A) = Z(B)$.

```
B ← A
zeile ← 1
spalte ← 1
while zeile ≤ m do
    while spalte ≤ n und B(i, spalte) = 0 für alle i mit zeile ≤ i ≤ m do
        spalte ← spalte + 1
    endwhile
    if spalte ≤ n then
        gewaehlteZeile ← ein i, sodass zeile ≤ i ≤ m und B(i, spalte) ≠ 0
        if gewaehlteZeile ≠ zeile then
            Vertausche die gewaehlteZeile-te mit der zeile-ten Zeile von B
        endif
        i ← zeile + 1
        while i ≤ m do
            Addiere passendes Vielfaches der zeile-ten Zeile zur i-ten Zeile von B, sodass B(i, spalte) = 0
            i ← i + 1
        endwhile
    endif
    zeile ← zeile + 1
    spalte ← spalte + 1
endwhile
return B
```

Dieser Algorithmus liefert also folgenden Satz.

SATZ 4.22. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann gibt es eine Matrix B in Zeilenstaffelform, sodass $Z(A) = Z(B)$.*

Die Zeilen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die nicht 0 sind, sind linear unabhängig. Daher haben wir auch eine Basis von

$$V = L((-5, 3, 1, 1), (-33, 17, 1, -1), (85, -44, -3, 2), (-19, 10, 1, 0))$$

gefunden, nämlich

$$B = (\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -28 \\ -38 \end{pmatrix}).$$

Wir fassen zusammen:

ALGORITHMUS 4.23 (Basis eines explizit gegebenen Unterraums).
Eingabe: Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$.
Ausgabe: Eine Basis $b_1, \ldots, b_k$ von $L(v_1, \ldots, v_m)$.

1 Bilde die $m \times n$-Matrix V, in deren Zeilen die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ stehen
2 Berechne eine Matrix B in Zeilenstaffelform, sodass $Z(V) = Z(B)$
3 **return** $(b_1, \ldots, b_k)$ als jene Zeilen von B, die nicht 0 sind

ÜBUNGSAUFGABEN 4.24.

(1) Bestimmen Sie eine Basis von $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$.
(2) Finden Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume!
  (a) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3\,y + z = 0\}$.
  (b) $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix})$.
  (c) $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix})$.

6. Bestimmen der Basis eines implizit gegebenen Unterraums

Wir überlegen uns jetzt, wie wir eine Basis eines implizit gegebenen Unterraums des $\mathbb{R}^n$ berechnen.

Wir nehmen also an, der Unterraum U ist in der Form

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$$

gegeben, wobei m eine natürliche Zahl und A eine $m \times n$-Matrix ist. Wir bestimmen eine Basis von U, indem wir das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit dem Gauß-Algorithmus lösen. Dabei sehen wir: wenn eine Zeilenstaffelform der Matrix A genau r Zeilen ungleich 0 hat, so treten in der Lösungsmenge des Gleichungssystems $n - r$ Parameter auf:

SATZ 4.25. *Sei B eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstaffelform, und sei r die Anzahl der Zeilen von B, die nicht* 0 *sind. Dann hat $N(B)$ eine Basis, die genau $n - r$ Vektoren enthält.*

ÜBUNGSAUFGABEN 4.26.

(1) Bestimmen Sie eine Basis für den Unterraum U des $\mathbb{R}^4$, der durch

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$$

gegeben ist.

Satz 4.27. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$, und sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann enthält der Nullraum von A einen von 0 verschiedenen Vektor.*

7. Die Dimension eines Unterraumes

Wir wir gesehen haben, kann ein Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ viele verschiedene Basen haben. Man kann zeigen, dass alle diese Basen aus gleich vielen Vektoren bestehen. Da außerdem jeder Unterraum des $\mathbb{R}^n$ eine Basis hat, kann man die "Größe" von U durch die Anzahl der Elemente eine Basis von U messen. Diese Anzahl bezeichnet man auch als die *Dimension* von U.

8. Koordinaten

Satz 4.28. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, sei $B = (b_1, \dots, b_m)$ eine Basis des Unterraums T von $\mathbb{R}^n$, und sei $t \in T$. Dann gibt es genau ein m-Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ mit*

$$t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot b_i.$$

Beweis. Ein solches m-Tupel existiert, da $t \in L(b_1, \dots, b_m)$. Sei nun $\overline{B}$ die $n \times m$-Matrix, in deren Spalten die Vektoren $(b_1, \dots, b_m)$ stehen. Angenommen, $\alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ und $\beta = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ seien zwei verschiedene Tupel mit $\overline{B} \cdot \alpha = \overline{B} \cdot \beta = t$. Dann gilt $\overline{B} \cdot (\alpha - \beta) = 0$ und $\alpha - \beta \neq 0$. Das ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von der Spalten von $\overline{B}$. □

Dieses m-Tupel gibt also an, wie wir den Vektor t aus den Basisvektoren zusammenbauen können. Wir nennen dieses Tupel die *Koordinaten* des Vektors t bezüglich der Basis B.

Definition 4.29. Sei $B = (b_1, \dots, b_m)$ Basis von $T \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $t \in T$, und sei $\overline{B}$ die $n \times m$-Matrix, in deren Spalten die Vektoren $(b_1, \dots, b_m)$ stehen. Dann heißt das $\alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\overline{B} \cdot \alpha = t$$

das *Koordinatentupel* von t bezüglich der Basis B. Wir schreiben auch $(t)_B = \alpha$.

Das Koordinatentupel $(t)_B$ erfüllt also die Gleichung

$$\overline{B} \cdot (t)_B = t.$$

Aufgaben 4.30. (1) Sei $B = ((1,0,3),(2,1,6))$, $T = L(B)$, und $v = (3,1,9)$. Offenbar gilt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

woraus $(v)_B = (1,1)$ folgt.

(2) Sei $T = L((3,2,1),(0,1,2))$, und $B = ((3,2,1),(0,1,2))$. Für das erste Basiselement gilt offensichtlich

$$(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

weiters ist zum Beispiel

$$(4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben 4.31.

(1) Der Vektor v hat bezüglich der Basis $A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix})$ der Ebene ε die Koordinaten $(v)_A = \binom{1}{0}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich der Basis $B = (\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 40 \\ -26 \end{pmatrix})$.

(2) Die Ebene ε hat die Basen

$$A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$$

und

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \binom{7}{-3}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A!

(3) Die Ebene e ist durch $e = L(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$ gegeben. Sie hat die Basen

$$B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$$

und

$$C = (\begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix}).$$

Der Vektor v ist gegeben durch $(v)_C = \binom{-1}{-2}$. Berechnen Sie $(v)_B$.

(4) Sei $a = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, und sei $B = (a, b)$. Zeigen Sie, dass ein Vektor $\binom{x}{y}$ bezüglich der Basis B die Koordinaten $\begin{pmatrix} \langle \binom{x}{y}, a \rangle \\ \langle \binom{x}{y}, b \rangle \end{pmatrix}$ hat; das heißt, zeigen Sie

$$(\tbinom{x}{y})_B = \begin{pmatrix} \langle \binom{x}{y}, a \rangle \\ \langle \binom{x}{y}, b \rangle \end{pmatrix}.$$

Stimmt diese Formel für jede Basis (a, b) des $\mathbb{R}^2$?

(5) Sei $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix})$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E.

  (a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \binom{3}{-2}$?
  (b) Wie lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich B ?
  (c) Geben Sie eine Basis C von E an, bezüglich der der Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\binom{0}{2}$ hat.

KAPITEL 5

Orthogonalität im $\mathbb{R}^n$

1. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

DEFINITION 5.1. Für $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist das *Skalarprodukt* von x und y definiert als

$$\langle x, y \rangle := x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

Es gilt

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2.$$

LEMMA 5.2. *Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

(1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
(2) $\langle \lambda\, x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

SATZ 5.3. *Der Winkel φ zwischen x und y ist gegeben durch*

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

DEFINITION 5.4. Zwei Vektoren *stehen* genau dann *normal aufeinander*, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Wir schreiben dann $x \perp y$.

ÜBUNGSAUFGABEN 5.5.

(1) Bestimmen Sie einen Vektor, der auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal steht.
(2) Sei $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix})$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E. Außerdem bezeichnen wir mit $\overline{B}$ die Matrix

$$\overline{B} := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Welches Gleichungssystem muss ein Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ erfüllen, der auf alle Vektoren in E normal steht? Was hat die Koeffizientenmatrix dieses Systems mit $\overline{B}$ zu tun?
(b) Mit welchem Gleichungssystem können Sie feststellen, ob ein Vektor v in E liegt? Was hat die Koeffizientenmatrix dieses Systems mit $\overline{B}$ zu tun?
(c) Sei $w = \left(\begin{smallmatrix} 16 \\ 44 \\ -6 \end{smallmatrix}\right)$. Finden Sie einen Vektor e, der in E liegt, sodass $w - e$ normal auf alle Vektoren in E steht.

2. Der Normalraum auf eine Menge von Vektoren

Wenn U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, dann bezeichnen wir den Raum $U^\wedge$ auch als "U orthogonal" und verwenden anstelle von $U^\wedge$ die Bezeichnung $U^\perp$. Für eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ ist $A^\perp$ also definiert durch

$$A^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \perp a \text{ für alle } a \in A\}.$$

Für jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ gilt $A^\perp = L(A)^\perp$ und $(A^\perp)^\perp = L(A)$.

Übungsaufgaben 5.6.

(1) Gegeben seien die Vektoren

$$x = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \; y = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \; z = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Berechnen Sie
(a) $\{x\}^\perp$,
(b) $\{x, y\}^\perp$,
(c) $\{x, y, z\}^\perp$,
und jeweils die Dimension davon.

(2) Welche Vektoren des $\mathbb{R}^4$ stehen auf alle drei Vektoren

$$(1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, -1), (1, 0, 2, 0)$$

normal? (Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^4$ stehen aufeinander normal, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist.)

3. Orthonormalbasen

Definition 5.7. Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $B = (b_1, \ldots, b_k)$ eine Basis von T. B ist eine *Orthonormalbasis* (ONB), wenn

(1) $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$.
(2) $\|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle} = 1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Beispiele 5.8.

(1) Die kanonische Basis $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ ist ONB des $\mathbb{R}^3$.
(2) $B = ((\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0,0,1))$ ist ONB des $\mathbb{R}^3$.
(3) $B = (\frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{2}(1,1,1,1))$ ist ONB von $L((1,-1,1,-1),(1,1,1,1))$.
(4) Sei $b_1 = (3,4), b_2 = (-4,3)$. Dann ist $(\frac{b_1}{5}, \frac{b_2}{5})$ ONB des $\mathbb{R}^2$.

Übungsaufgaben 5.9.

(1) (Orthonormalbasen) Welche der folgenden Basen sind ONB?
  (a) $(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \frac{-1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix})$.
  (b) $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$.
  (c) $(\begin{pmatrix}0.6\\0.8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0.8\\0.6\end{pmatrix})$.

Satz 5.10. *Sei $B = (b_1, \ldots, b_k)$ eine ONB und $v \in L(B)$ mit den Koordinaten $(v)_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Dann gilt*

$$\|v\|^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2.$$

Beweis. Da B eine ONB ist, gilt

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^k \lambda_i\, b_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j\, b_j\rangle &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i\, \lambda_j\, \langle b_i, b_j\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, \lambda_i\, \langle b_i, b_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \cdot 1.\end{aligned}$$

□

Wir wenden diesen Satz an:

Sei $b_1 = (0.6, 0.8)$, $b_2 = (-0.8, 0.6)$. Berechnen Sie die Länge von $v = 12 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2$!

Lösung: Da (b_1, b_2) eine ONB des $\mathbb{R}^2$ ist, gilt

$$\|v\| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

Wir kontrollieren das Ergebnis, indem wir v berechnen. Da

$$v = 12 \cdot (0.6, 0.8) + 5 \cdot (-0.8, 0.6) = (3.2, 12.6),$$

gilt

$$\|v\| = \sqrt{(3.2)^2 + (12.6)^2} = 13.$$

Satz 5.11. *Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit der ONB $B = (b_1, \ldots, b_k)$. Sei $v \in L(B)$ mit den Koordinaten $(v)_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Dann gilt*

$$\lambda_i = \langle v, b_i \rangle \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, k\}$. Wir wissen, dass

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, b_j = v,$$

und somit

$$\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, b_j, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle.$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \langle b_j, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle$$

oder

$$\lambda_i \, \langle b_i, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle.$$

Somit gilt

$$\lambda_i = \langle v, b_i \rangle.$$

□

Bei Orthonormalbasen müssen wir also kein Gleichungssystem lösen, um die Koordinaten eines Vektors zu bestimmen. Dazu folgendes Beispiel: Gegeben sei die ONB $B = ((0.6, 0.8), (-0.8, 0.6))$. Gesucht sind die Koordinaten (λ_1, λ_2) von $v = (2, 1)$ bzgl. B.

$$\lambda_1 = \langle v, b_1 \rangle = 2, \quad \lambda_2 = \langle v, b_2 \rangle = -1.$$

Also gilt:

$$(v)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Orthonormalbasis besitzt also zwei wesentliche Vorteile gegenüber normalen Basen:

(1) Mit $(v)_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ kann die Länge des Vektors v als

$$\|v\| = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2}$$

berechnet werden.

(2) Die Koordinaten eines Vektors v erhält man als

$$(v)_B = \begin{pmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{pmatrix}.$$

4. Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben ist ein Unterraum T mit der Basis $B = (b_1, \ldots, b_m)$. Gesucht ist eine ONB $(d_1, \ldots, d_m)$ von T.

Wir konstruieren $d_1, \ldots, d_m$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $d_i \perp d_j$ für $i \neq j$,
(2) $\|d_i\| = 1$ für alle i,
(3) für alle $k \leq m$ gilt $L(b_1, \ldots, b_k) = L(d_1, \ldots, d_k)$.

(1) und (2) sollen garantieren, dass wir eine ONB erhalten. (3) fordert, dass die ersten k Vektoren der gesuchten ONB den gleichen Vektorraum aufspannen wie die ersten k Vektoren der Basis B.

Algorithmus 5.12.

(1) *Konstruktion von* d_1: Wir setzen $c_1 = b_1$ und $d_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|}$.
(2) *Konstruktion von* d_2: Um (3) erfüllen zu können, machen wir den Ansatz

$$c_2 = b_2 + \alpha_1 \cdot d_1$$

mit $\langle c_2, d_1 \rangle = 0$. Aus

$$\langle b_2 + \alpha_1 \cdot d_1, d_1 \rangle = \langle b_2, d_1 \rangle + \alpha_1 \langle d_1, d_1 \rangle = \langle b_2, d_1 \rangle + \alpha_1 = 0$$

folgt

$$\alpha_1 = -\langle b_2, d_1 \rangle.$$

Also erhalten wir mittels

$$c_2 = b_2 - \langle b_2, d_1 \rangle \cdot d_1,$$
$$d_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|}$$

den gewünschten Vektor d_2.
(3) *Konstruktion von* d_3: Für c_3 machen wir analog zu c_2 den Ansatz

$$c_3 = b_3 + \alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2.$$

Fordern wir dann Normalität zu den ersten beiden Vektoren, so erhalten wir

$$\langle c_3, d_1\rangle = \langle b_3, d_1\rangle + \alpha_1 \underbrace{\langle d_1, d_1\rangle}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{\langle d_2, d_1\rangle}_{=0} = 0,$$

also

$$\alpha_1 = -\langle b_3, d_1\rangle,$$

und

$$\langle c_3, d_2\rangle = \langle b_3, d_2\rangle + \alpha_1 \underbrace{\langle d_1, d_2\rangle}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\langle d_2, d_2\rangle}_{=1} = 0,$$

also

$$\alpha_2 = -\langle b_3, d_2\rangle.$$

Somit ergibt sich c_3 als

$$c_3 = b_3 - \langle b_3, d_1\rangle \cdot d_1 - \langle b_3, d_2\rangle \cdot d_2$$

und der gesuchte Vektor d_3 der Länge 1 als

$$d_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|}.$$

(4) *Konstruktion von* d_i: Seien $d_1, \ldots, d_{i-1}$ bereits bekannt. Dann setzen wir

$$c_i = b_i - \langle b_i, d_1\rangle \cdot d_1 - \cdots - \langle b_i, d_{i-1}\rangle \cdot d_{i-1}$$

und erhalten mit

$$d_i = \frac{c_i}{\|c_i\|}$$

den gewünschten Vektor.

Aufgaben 5.13. (1) Sei

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Gesucht ist eine ONB von $L(B)$.

Offenbar ist $c_1 = (1, -1, 1, -1)$ und somit

$$d_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \langle (-1, 1, 3, -3), d_1 \rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$d_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist

$$c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle (1, 0, 0, 0), d_1 \rangle \, d_1 - \langle (1, 0, 0, 0), d_2 \rangle \, d_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$d_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Sei $B = ((3, 4), (5, 6))$. Gesucht ist eine ONB von $L(B)$.

Wir erhalten

$$d_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}.$$

Man prüft leicht nach, dass die beiden Vektoren tatsächlich normal aufeinander stehen.

Satz 5.14. *Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann hat T eine ONB.*

Beweis. Aus einer beliebigen Basis von T kann mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine ONB berechnet werden. □

Übungsaufgaben 5.15.

(1) Orthonormalisieren Sie die folgende Familie von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt!

$$A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

(2) Bestimmen Sie jeweils eine Orthonormalbasis (ONB) für folgende Unterräume des $\mathbb{R}^3$!
   (a) $U = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$.
   (b) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2\,x_3 + 2\,x_4 = 0 \text{ und } x_2 - 2\,x_3 + 2\,x_4 = 0\}$. (Hinweis: Berechnen Sie zuerst eine Basis von V und orthonormalisieren Sie diese mit dem Verfahren von Gram-Schmidt).

(3) Geben Sie eine Orthonormalbasis der Ebene $e : x - 2\,y + 3\,z = 0$ an.

(4) Bestimmen Sie mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

5. Überbestimmte Gleichungssysteme

Oft trifft man auf Gleichungssysteme, die keine Lösung besitzen, wie z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In solchen Fällen wird man ein x suchen, das dem Gleichungssystem "möglichst gut" genügt. Naheliegend ist es, jenes x als "Lösung" zu betrachten, das den kleinsten Fehler liefert, d.h. für das $\|A \cdot x - b\|$ minimal ist.

Definition 5.16. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Eine *bestapproximierende Lösung* des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist ein $x^* \in \mathbb{R}^n$, sodass $\|A \cdot x^* - b\|$ minimal ist.

Wir wissen, dass $\{A \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ genau der Spaltenraum von A ist. Wir suchen also jenes Element des Spaltenraumes von A, das von b minimalen Abstand hat. Dazu sollte $A \cdot x$ die Orthogonalprojektion von b auf den Spaltenraum von A sein. Dann steht $b - A \cdot x$ auf den Spaltenraum von A normal. Es gilt also

$$A^T \cdot (b - A \cdot x) = 0.$$

Wenn $A^T \cdot A$ invertierbar ist, dann können wir x durch $x = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$ bestimmen.

Satz 5.17. *Sei A eine Matrix, deren Spaltenvektoren linear unabhängig sind, und sei b ein Vektor. Dann ist die bestapproximierende Lösung x^* von $A \cdot x = b$ gegeben durch*

$$x^* = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b.$$

BEISPIEL 5.18. Wir bestimmen die bestapproximierende Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir

$$x^* = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 5.19.

(1) Das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist für folgendes A und b unlösbar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die "beste Näherungslösung". Warum (bzw. in welchem Sinn) ist diese Lösung "besser" als $(1, 1)$?

Nun versuchen wir, die "beste Gerade durch eine Punktwolke" zu legen.

Gegeben seien die Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Gesucht ist die bestapproximierende Gerade $y = k\,x + d$ durch diese Punktwolke.

Dafür berechnet man die bestapproximierende Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

wie oben beschrieben. Wir überlegen uns noch, welcher "Abstand" zwischen Punkten und Gerade hier wirklich minimiert wird. Die bestaproximierende Lsung minimiert

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} y_1 - (k\,x_1 + d) \\ \vdots \\ y_n - (k\,x_n + d) \end{pmatrix} \right\|,$$

also die Summe der Quadrate der Vertikalabstnde zwischen den Punkten und der Gerade.

Übungsaufgaben 5.20.

(1) Bestimmen Sie jene Gerade der Form $y = k\,x + d$, die die Punkte $(0, 3)$, $(1, 4)$ und $(2, 7)$ bestmöglich approximiert. "Bestmöglich" heißt dabei, dass k und d so zu bestimmen sind, dass

$$(y_1 - (k\,x_1 + d))^2 + (y_2 - (k\,x_2 + d))^2 + (y_3 - (k\,x_3 + d))^2$$

minimal wird.

(2) Bestimmen Sie jene Gerade der Form $y = k\,x + d$, die die Punkte $(2, 3)$, $(3, 0)$ und $(6, 5)$ bestmöglich approximiert. "Bestmöglich" heißt dabei, dass k und d so zu bestimmen sind, dass

$$(y_1 - (k\,x_1 + d))^2 + (y_2 - (k\,x_2 + d))^2 + (y_3 - (k\,x_3 + d))^2$$

minimal wird.

KAPITEL 6

Lineare Abbildungen

1. Lineare Zusammenhänge in geometrischen Aufgaben

In diesem Kapitel zeigen wir, dass sich eine Fülle von mathematischen Problemen durch *lineare Abbildungen* beschreiben lassen.

DEFINITION 6.1. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $h : U \to V$ ist eine *lineare Abbildung*, wenn folgendes gilt:

(1) Für alle $u_1, u_2 \in U : h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2)$; (Additivität)
(2) Für alle $u \in U$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R} : h(\lambda\, u) = \lambda\, h(u)$. (Homogenität)

Wir geben nun einige Beispiele, die zeigen, wie viele Fragen sich durch lineare Abbildungen modellieren lassen. Wir werden nun Bewegungen geometrischer Objekte im Raum, wie etwa Spiegelungen und Drehungen, als lineare Abbildungen interpretieren. Wir beginnen mit einigen Beispielen.

BEISPIEL 6.2. Sei s jene Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die jeden Punkt auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an der x-Achse landet. Dann lässt sich s so schreiben:

$$\begin{array}{rccc} s : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \binom{x}{y} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \binom{x}{y}. \end{array}$$

Die Funktion s ist dann eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

BEISPIEL 6.3. Wir überlegen uns, wo der Punkt $\binom{x}{y}$ nach einer Drehung um den Nullpunkt um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn landet. Sei d diese Drehung. Dann lässt sich d so schreiben:

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \binom{x}{y} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \cdot \binom{x}{y}. \end{array}$$

Auch d ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

2. Abbildungsmatrizen linearer Abbildungen

Sei $h : U \to V$ eine lineare Abbildung, $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U. Sei $x \in U$ mit $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i * b_i$. Dann gilt wegen der Linearität von h:

$$h(x) = h(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i * b_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i * h(b_i).$$

Eine lineare Abbildung ist also durch die Bilder der Basisvektoren bereits vollständig bestimmt.

Wir werden jetzt sehen, dass sich jede lineare Abbildung, deren Definitions- und Bildbereich endlichdimensionale Vektorräume sind, durch eine Matrix darstellen lässt.

Definition 6.4. Seien U, V Vektorräume, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Sei h eine lineare Abbildung von U nach V. Wir definieren nun die $n \times m$-Matrix $S_h(B, C)$. Dazu legen wir fest, dass für $i \in \{1, \ldots, m\}$ in der i-ten Spalte von $S_h(B, C)$ der Vektor $(h(b_i))_C$ steht. Es gilt also

$$S_h(B, C) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (h(b_1))_C & (h(b_2))_C & \cdots & (h(b_m))_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $S_h(B, C) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ heißt *Abbildungsmatrix* oder *Darstellungsmatrix* von h bezüglich der Basen B und C.

Die Darstellungsmatrix enthält, wenn man die zugehörigen Basen kennt, die gesamte Information über die lineare Abbildung. Im folgenden Satz lernen wir eine Formel kennen, die uns erlaubt, die Bilder eines jeden Vektors unter der linearen Abbildung mithilfe der Darstellungsmatrix zu berechnen.

Satz 6.5. *Seien U, V Vektorräume, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Sei h eine lineare Abbildung von U nach V. Dann gilt*

$$(h(u))_C = S_h(B, C) \cdot (u)_B \text{ für alle } u \in U. \tag{6.1}$$

Beweis. Sei $u \in U$ mit $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(h(u))_C &= \big(h(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i)\big)_C \\
&= \big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, h(b_i)\big)_C \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \big(h(b_i)\big)_C \\
&= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (h(b_1))_C & (h(b_2))_C & \cdots & (h(b_m))_C \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\
&= S_h(B, C) \cdot (u)_B.
\end{aligned}$$

□

Wir zeigen nun, dass die Abbildungsmatrix durch die Gleichung (6.1) eindeutig bestimmt ist.

Satz 6.6. *Seien U, V Vektorräume, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von U und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Sei h eine lineare Abbildung von U nach V, und sei A eine $n \times m$-Matrix, sodass*

$$\text{für alle } u \in U : (h(u))_C = A \cdot (u)_B. \tag{6.2}$$

Dann gilt $A = S_h(B, C)$.

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, m\}$. Wegen (6.2) gilt $(h(b_i))_C = A \cdot (b_i)_B$, also

$$(h(b_i))_C = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathrm{i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei der Einser an der i-ten Stelle steht. Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt die i-te Spalte von A. Also ist die i-te Spalte von A gleich $(h(b_i))_C$. Daher $A = S_h(B, C)$. □

Beispiel 6.7. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die folgende lineare Abbildung.

$$\begin{array}{rcccc} h & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & \binom{x}{y} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 2x+y \\ -x+4y \end{pmatrix}. \end{array}$$

Sei B die Basis $(\binom{-1}{2}, \binom{4}{5})$ des $\mathbb{R}^2$, und sei C die Basis $\left(\begin{pmatrix}-9\\-13\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}20\\39\\30\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie $S_h(B,C)$.

Lösung: Es gilt

$$h(b_1) = \begin{pmatrix}-7\\0\\9\end{pmatrix},\ h(b_2) = \begin{pmatrix}2\\13\\16\end{pmatrix}.$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -9 & 20 & 0 \\ -13 & 39 & 1 \\ -7 & 30 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix}-7\\0\\9\end{pmatrix}$$

erhalten wir $(h(b_1))_C = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ und ebenso $(h(b_2))_C = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Insgesamt erhalten wir

$$S_h(B,C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In Mathematica kann man die notwendigen Rechnungen so durchführen:

```
h[x_, y_] = {{3, -2}, {2, 1}, {-1, 4}}.{x, y}
{3x - 2y, 2x + y, -x + 4y}
hb1 = h[-1, 2]
{-7, 0, 9}
hb2 = h[4, 5]
{2, 13, 16}
CC = {{-9, 20, 0}, {-13, 39, 1}, {-7, 30, 0}}
{{-9, 20, 0}, {-13, 39, 1}, {-7, 30, 0}}
MatrixForm[CC]
```

$$\begin{pmatrix} -9 & 20 & 0 \\ -13 & 39 & 1 \\ -7 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

```
LinearSolve[CC, hb1]
{3, 1, 0}
LinearSolve[CC, hb2]
{2, 1, 0}
```

Beispiel 6.8. Sei $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^1$ mit den kanonischen Basen $B = ((1,0),(0,1))$ und $C = ((1))$. Die lineare Abbildung $h : U \to V$ sei definiert durch

$$h((x,y)) = (3\,x - 2\,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist $(h(b_1))_C = (3)$ und $(h(b_2))_C = (-2)$. Somit gilt

$$S_h(B,C) = (3 \quad -2).$$

Beispiel 6.9. Sei $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^1$ mit den Basen $B = ((2,3),(3,-2))$, $C = ((2))$. Die lineare Abbildung $h : U \to V$ sei definiert durch

$$h((x,y)) = (3\,x - 2\,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $h(b_1) = 0$, also $(h(b_1))_B = (0)$ und $h(b_2) = (13)$, also $(h(b_2))_B = 6.5$, und folglich $S_h(B,C) = (0\;\; 6.5)$.

Übungsaufgaben 6.10.

(1) Eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $h(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $h(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_h(E,E)$, wobei $E = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$.

(2) Seien E_2, E_3 die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, und sei

$$\sigma((x,y,z)) := (3x - 2y,\, 2z).$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E_3, E_2)$ an.

3. Abbildungsmatrizen für Spiegelungen und Drehungen

Wir wollen nun die Abbildungsmatrizen für bestimmte Drehungen und Spiegelungen bestimmen. Wir betrachten folgende Beispiele:

Beispiel 6.11. Sei e die Ebene $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, und sei σ jene Abbildung, die jeden Punkt im $\mathbb{R}^3$ auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an der Ebene e landet.

Gesucht ist die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E,E)$ dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis E des $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 6.12. Sei g die Gerade mit der Gleichung $5\,x - 2\,y = 0$ im $\mathbb{R}^2$. Sei σ jene Abbildung, die jeden Punkt im $\mathbb{R}^2$ auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an g landet.

Gesucht ist die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E,E)$ dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis E des $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 6.13. Sei g die Gerade $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$, und sei $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jene Abbildung, die jeden Punkt auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Drehung um $60°$ um die Gerade g landet. Wir müssen noch die Richtung der Drehung festlegen: Wenn wir vom Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $x + 2\,y - 2\,z = 0$ hinunterschauen, dann sollen sich die Punkte dieser Ebene gegen den Uhrzeigersinn drehen.

Alle drei Beispiele kann man mit dem gleichen "Programm" lösen. Sei h die angegebene lineare Abbildung. Dann gehen wir so vor:

(1) Bestimme eine Basis B, sodass $S_h(B,B)$ leicht zu bestimmen ist.
(2) Bestimme $S_h(B,B)$.
(3) Bestimme $S_h(E,E)$ aus $S_h(B,B)$.

Die Schritte (1) und (2) können wir bereits jetzt durchführen; für den Schritt (3) müssen wir uns noch überlegen, wie man aus den Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis die Koordinaten bezüglich einer anderen Basis ausrechnet.

Wir starten mit Aufgabe 6.11. Wir wählen eine Basis (b_1, b_2, b_3) des $\mathbb{R}^3$, sodass b_1, b_2 in der Ebene e liegen, und b_3 auf b_1 und b_2 normal steht. Es gilt dann $\sigma(b_1) = b_1$, $\sigma(b_2) = b_2$ und $\sigma(b_3) = -b_3$. Also gilt $(\sigma(b_1))_B = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $(\sigma(b_2))_B = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $(\sigma(b_3))_B = (-b_3)_B = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt

$$S_\sigma(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun eine Basis B mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu wählen wir $b_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right)$ und $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Wir bestimmen einen Vektor, der auf beiden normal steht:

NullSpace[{{1, 2, −1}, {0, 1, −1}}]
{{−1, 1, 1}}

Also wählen wir $b_3 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, und somit

$$B = (\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\1\end{smallmatrix}\right).$$

Wir bestimmen nun B und $S_\sigma(B,B)$ für Aufgabe 6.12. Wir wählen eine Basis (b_1, b_2) des $\mathbb{R}^2$, sodass b_1 auf der Gerade g liegt, und b_2 auf b_1 normal steht. Es gilt dann $\sigma(b_1) = b_1$ und $\sigma(b_2) = -b_2$, und somit $(\sigma(b_1))_B = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $(\sigma(b_2))_B = (-b_2)_B = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt

$$S_\sigma(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun eine Basis B mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu wählen wir $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}5\\-2\end{smallmatrix}\right)$ und $b_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}\right)$. Wir erhalten

$$B = (\left(\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}5\\-2\end{smallmatrix}\right)).$$

Nun bestimmen wir B und $S_\delta(B,B)$ für Aufgabe 6.13. Dazu bestimmen wir eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$, sodass $b_3 = \frac{1}{||\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-2\end{smallmatrix}\right)||}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-2\end{smallmatrix}\right)$. Außerdem soll (b_1,b_2,b_3) *positiv orientiert* sein. Das heißt: "Wenn man b_1 in b_2 hineinschraubt, dann soll sich eine Schraube mit Rechtsgewinde in Richtung b_3 bewegen." Eine Orthonormalbasis (b_1,b_2,b_3) ist dann positiv orientiert, wenn $b_1 \times b_2 = b_3$. Zu einer solchen Basis B bestimmen wir jetzt die Matrix $S_\delta(B,B)$. Es gilt $h(b_3) = b_3$, $h(b_1) = \cos(60^\circ)\,b_1 + \sin(60^\circ)\,b_2$, und $h(b_2) = -\sin(60^\circ)\,b_1 + \cos(60^\circ)\,b_2$. Mit $c := \cos(60^\circ)$ und $s := \sin(60^\circ)$ lässt sich $S_\delta(B,B)$ also durch

$$S_\delta(B,B) = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

angeben. Jetzt bestimmen eine Basis B des $\mathbb{R}^3$ mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu bestimmen wir zunächst eine ONB der Ebene $e = (L(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-2\end{smallmatrix}\right)))^\perp$. Wir bestimmen eine Basis für diese Ebene:

$\mathbf{NullSpace[\{\{1,2,-2\}\}]}$
$\{\{2,0,1\},\{-2,1,0\}\}$

Daher ist $((2,0,1),(-2,1,0))$ eine Basis von e. Wir bestimmen nun eine ONB von e.

$\mathbf{e1 = \{2,0,1\};}$
$\mathbf{e2 = \{-2,1,0\};}$
$\mathbf{d1 = e1/Sqrt[e1.e1]}$
$\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$
$\mathbf{c2 = e2 - (e2.d1) * d1}$
$\left\{-\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right\}$
$\mathbf{d2 = c2/Sqrt[c2.c2]}$
$\left\{-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right\}$

Daher ist die Basis F, die durch

$$F = (\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{45}}\left(\begin{smallmatrix}-2\\5\\4\end{smallmatrix}\right), \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-2\end{smallmatrix}\right))$$

gegeben ist, eine ONB des $\mathbb{R}^3$. Wir bestimmen, ob F positive Orientierung hat:

$\mathbf{Cross[d1,d2]}$
$\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$

Die Orientierung ist also noch falsch. Wenn wir das Vorzeichen von f_1 umdrehen, erhalten wir eine Basis mit positiver Orientierung. (Man kann genausogut das

Vorzeichen von f_2 umdrehen. Man darf aber nicht das Vorzeichen von f_3 umdrehen; die Basis, die man durch Umdrehen des Vorzeichens von f_3 erhält, ist zwar positiv orientiert, aber ihr dritter Basisvektor ist nicht mehr der gewünschte.) Wir schreiben die Basisvektoren von B in die Spalten einer Matrix.

d3 = Cross[−d1, d2]

$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$

B = Transpose[{−d1, d2, d3}]

$\left\{\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$

MatrixForm[B]

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Somit haben wir auch für Beispiel 6.13 eine Basis B und die Matrix $S_\delta(B, B)$ gefunden.

4. Basistransformationen

Wir lösen folgendes Problem: Gegeben sind zwei Basen B, C des gleichen Unterraums U des $\mathbb{R}^n$, und die Koordinaten $(v)_B$ eines Vektors $v \in U$. Gesucht sind die Koordinaten von v bezüglich C, also $(v)_C$.

Beispiel 6.14. Sei $B = ((1, 0, 1), (1, -1, 0))$ und $C = ((3, -2, 1), (1, 1, 2))$, und sei $(x)_B = (1, -1)$. Gesucht ist $(x)_C$.

Lösung: Aus B und $(x)_B$ können wir

$$x = B \cdot (x)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnen. Wegen $C \cdot (x)_C = x$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (x)_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir $(x)_C = (-0.2, 0.6)$.

Allgemein gehen wir also so vor: Wenn $\overline{B}$ und $\overline{C}$ die Matrizen sind, in deren Spalten die Vektoren von B beziehungsweise C stehen, lässt sich $(x)_C$ aus der Gleichung

$$\overline{C} \cdot (x)_C = \overline{B} \cdot (x)_B$$

berechnen. Wenn $\overline{C}$ gleich viele Spalten wie Zeilen hat, dann ist $\overline{C}$ invertierbar, und wir erhalten

$$(x)_C = \overline{C}^{-1} \cdot \overline{B} \cdot (x)_B.$$

Wenn $\overline{C}$ weniger Spalten als Zeilen hat, dann wissen wir, dass die Spaltenvektoren von $\overline{C}$ linear unabhängig sind. Da $\overline{C}$ eine Matrix über den reellen Zahlen ist, ist $\overline{C}^T \cdot \overline{C}$ invertierbar. Dann gilt: $\overline{C}^T \cdot \overline{C} \cdot (x)_C = \overline{C}^T \cdot \overline{B} \cdot (x)_B$, und somit

$$(x)_C = (\overline{C}^T \cdot \overline{C})^{-1} \cdot \overline{C}^T \cdot \overline{B} \cdot (x)_B.$$

Definition 6.15. Sei U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, und seien B und C Basen von U. Eine Matrix T ist eine *Basistransformationsmatrix* von B nach C, wenn für alle $u \in U$ gilt

$$(u)_C = T \cdot (u)_B.$$

Es gibt genau eine solche Matrix. Wir kürzen sie mit ${}_CT_B$ ab. Es gilt also

$$(u)_C = {}_CT_B \cdot (u)_B \text{ für alle } u \in U.$$

Die Basistransformationsmatrix ${}_CT_B$ ist genau die Abbildungsmatrix $S_{\mathrm{id}}(B, C)$, wobei $\mathrm{id} : U \to U$, $u \mapsto u$ die identische Abbildung ist.

Seien $\overline{B}$ und $\overline{C}$ die Matrizen, in deren Spalten die Vektoren der Basen B bzw. C stehen. Dann kann die Basistransformationsmatrizen so berechnen:

(1) Falls $\overline{B}$ und $\overline{C}$ quadratische Matrizen sind, so gilt ${}_CT_B := \overline{C}^{-1} \cdot B$.
(2) Wenn $\overline{B}$ und $\overline{C}$ nicht quadratisch sind ${}_CT_B := (\overline{C}^T \cdot \overline{C})^{-1} \cdot \overline{C}^T \cdot \overline{B}$. (Das funktioniert für Vektorräume über den reellen Zahlen. Für Vektorräume über anderen Körpern muss das nicht funktionieren).
(3) In jedem Fall kann man ${}_CT_B$ als Abbildungsmatrix $S_{\mathrm{id}}(B, C)$ berechnen. In der i-ten Spalte von ${}_CT_B$ steht also $(b_i)_C$, also die Lösung des Gleichungssystems $\overline{C} \cdot x = b_i$.

Übungsaufgaben 6.16.

(1) (Koordinaten) Die Ebene ε hat die Basen

$$A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$$

und

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

(a) Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A!

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T, sodass für alle $v \in \varepsilon$ gilt:

$$(v)_A = T \cdot (v)_B.$$

(T ist dann die Basistransformationsmatrix ${}_AT_B$).

5. Hintereinanderausführung und Matrizenmultiplikation

Satz 6.17. *Seien U, V, W Vektorräume mit den Basen A, B, C, und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt*

$$S_{g \circ f}(A, C) = S_g(B, C) \cdot S_f(A, B). \tag{6.3}$$

Beweis. Wir zeigen, dass für alle $u \in U$ gilt:

$$(S_g(B, C) \cdot S_f(A, B)) \cdot (u)_A = ((g \circ f)\ (u))_C.$$

Dann folgt aus Satz 6.6 die Gleichung (6.3). Sei $u \in U$. Dann gilt $(S_g(B, C) \cdot S_f(A, B)) \cdot (u)_A = S_g(B, C) \cdot (S_f(A, B) \cdot (u)_A) = S_g(B, C) \cdot (f(u))_B = \big(g(f(u))\big)_C = \big(g \circ f\ (u)\big)_C$. □

Beispiel 6.18. Man spiegle den Punkt $(2, 3)$ an der x-Achse, und drehe anschließend den gespiegelten Punkt um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt:

Lösung: Die Spiegelung σ an der x-Achse hat bzgl. der kanonischen Basis E des $\mathbb{R}^2$ die Darstellungsmatrix $S_\sigma(E, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Drehung δ um 90° hat die Darstellungsmatrix $S_\delta(E, E) = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix}$. Die Darstellungsmatrix der Spiegelung mit anschließender Drehung ist also

$$S_{\delta \circ \sigma}(E, E) = S_\delta(E, E) \cdot S_\sigma(E, E) = \begin{pmatrix} \cos(90°) & \sin(90°) \\ \sin(90°) & -\cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $\delta(\sigma((2, 3))) = (3, 2)$.

Satz 6.19. *Seien U, V Vektorräume, und seien A, B Basen von U und C, D Basen von V. Sei h eine lineare Abbildung von U nach V. Dann gilt*

$$S_h(A, D) = {}_DT_C \cdot S_h(B, C) \cdot {}_BT_A.$$

Proof. Für alle $u \in U$ gilt ${}_DT_C \cdot S_h(B, C) \cdot {}_BT_A \cdot (u)_A = (h(u))_D$. Also gilt nach Satz 6.6 ${}_DT_C \cdot S_h(B, C) \cdot {}_BT_A = S_h(A, D)$. □

Das folgende Korollar wird uns helfen, die Beispiele 6.11, 6.12 und 6.13 zu lösen.

Korollar 6.20. *Sei K ein Körper, sei B eine Basis des K-Vektorraums K^n, und sei E die kanonische Basis von K^n. Sei h eine lineare Abbildung von K^n nach K^n. Dann gilt*

$$S_h(E,E) = \, _ET_B \cdot S_h(B,B) \cdot \, _BT_E.$$

Wenn $\overline{B}$ die Matrix ist, in deren Spalten die Vektoren von B stehen, so gilt also

$$S_h(E,E) = \overline{B} \cdot S_h(B,B) \cdot \overline{B}^{-1}.$$

6. Abbildungsmatrizen für Spiegelungen und Drehungen bezüglich der kanonischen Basis

Wir lösen das Beispiel 6.11. Dazu müssen wir die Abbildungsmatrix $S_h(E,E)$ aus der Abbildungsmatrix $S_h(B,B)$ ausrechnen.

B = Transpose[{{1, 2, −1}, {0, 1, −1}, {−1, 1, 1}}]
$\{\{1,0,-1\},\{2,1,1\},\{-1,-1,1\}\}$
ShBB = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, −1}}
$\{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,-1\}\}$
ETB = B
$\{\{1,0,-1\},\{2,1,1\},\{-1,-1,1\}\}$
BTE = Inverse[B]
$\left\{\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\},\{-1,0,-1\},\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}\right\}$
ShEE = ETB.ShBB.BTE
$\left\{\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\},\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right\},\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}\right\}$
MatrixForm[ShEE]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Nun lösen wir das Beispiel 6.12.

B = Transpose[{{2, 5}, {5, −2}}]
$\{\{2,5\},\{5,-2\}\}$
ShBB = {{1, 0}, {0, −1}}
$\{\{1,0\},\{0,-1\}\}$
ETB = B
$\{\{2,5\},\{5,-2\}\}$
BTE = Inverse[B]
$\left\{\left\{\frac{2}{29},\frac{5}{29}\right\},\left\{\frac{5}{29},-\frac{2}{29}\right\}\right\}$
ShEE = ETB.ShBB.BTE
$\left\{\left\{-\frac{21}{29},\frac{20}{29}\right\},\left\{\frac{20}{29},\frac{21}{29}\right\}\right\}$
MatrixForm[ShEE]

$$\begin{pmatrix} -\frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{21}{29} \end{pmatrix}$$

Schließlich lösen wir noch Beispiel 6.13

B = Transpose[{−1/Sqrt[5] ∗ {2, 0, 1}, 1/Sqrt[45] ∗ {−2, 5, 4}, 1/3 ∗ {1, 2, −2}}]

$$\left\{\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

c = Cos[π/3];

s = Sin[π/3];

ShBB = {{c, −s, 0}, {s, c, 0}, {0, 0, 1}}

$$\left\{\left\{\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}$$

ETB = B

$$\left\{\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

BTE = Inverse[B]

$$\left\{\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}, \left\{-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

ShEE = Simplify[ETB.ShBB.BTE]

$$\left\{\left\{\frac{5}{9}, \frac{1}{9} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{9} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{\frac{1}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{13}{18}, \frac{1}{18}\left(-4 - 3\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{-\frac{1}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{18}\left(-4 + 3\sqrt{3}\right), \frac{13}{18}\right\}\right\}$$

MatrixForm[N[ShEE, 6]]

$$\begin{pmatrix} 0.555556 & 0.688461 & 0.466239 \\ -0.466239 & 0.722222 & -0.510897 \\ -0.688461 & 0.0664529 & 0.722222 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgaben 6.21.

(1) Finden Sie eine Basis B, bezüglich der die Spiegelung δ an der Ebene $x+y+z=0$ die Abbildungsmatrix

$$S_\delta(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat.

(2) Bestimmen Sie eine geeignete Basis B des $\mathbb{R}^2$, für die die Abbildungsmatrix der Spiegelung s an der Geraden $g: 7\,x - 4\,y$ folgende Form besitzt:

$$S_s(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt der Ebene $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $-3\,x + 4\,y = 0$ spiegelt.

(a) Bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^2$, sodass für die Abbildungsmatrix $S_\sigma(B,B)$ der Spiegelung σ bezüglich der Basis B folgende Gleichung gilt.

$$S_\sigma(B,B) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E,E)$ der Spiegelung σ bezüglich der kanonischen Basis E.

(c) Wo landet der Punkt (a,b) nach dieser Spiegelung σ?

(4) Sei h die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e : x+2\,y+2\,z = 0$ spiegelt.

(a) Berechnen Sie $h(v)$ für $v \in \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_h(B,B)$ für die Basis

$$B = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)).$$

(5) Wir betrachten die Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jeden Punkt an der y-Achse spiegelt. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E,E)$ dieser Abbildung bezüglich der kanonischen Basis E. Testen Sie Ihre Abbildungsmatrix, indem Sie damit das Spiegelbild von $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ ausrechnen.

(6) Geben Sie die Darstellungsmatrix für die Spiegelung an der Ebene $2\,x-y+z = 0$ bezüglich der kanonischen Basis E an.

(7) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene)

(a) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden

$$x + y = 0$$

spiegelt. Wo landet der Punkt (a,b) nach dieser Spiegelung σ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.

(b) Finden Sie mithilfe einer Skizze, wo der Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ landet, und überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Rechnung anhand der Skizze.

(8) Sei h die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e : x+2\,y+2\,z = 0$ spiegelt. Wir suchen in diesem Beispiel $S_h(E,E)$, wobei E die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Gehen Sie dazu so vor:

(a) Bestimmen Sie $S_{\mathrm{id}}(E,B)$. Dabei ist id die identische Abbildung. $S_{\mathrm{id}}(E,B)$ ist also eine Basistransformationsmatrix, und erfüllt die Eigenschaft $(v)_B = S_{\mathrm{id}}(E,B) \cdot (v)_E$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.)

(b) Bestimmen Sie $S_{\mathrm{id}}(B,E)$.

(c) Bauen Sie aus diesen beiden Matrizen und $S_h(B,B)$ die Matrix $S_h(E,E)$ zusammen.

(9) (Spiegelung an einer Ebene im Raum) Wo landet der Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ nach der Spiegelung σ an der Ebene

$$-2\,x - y + z = 0\ ?$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung!

(10) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden $12\,x+5\,y=0$ spiegelt. Wo landet der Punkt (a,b) nach dieser Spiegelung σ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.

(11) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden $15\,x-8\,y=0$ spiegelt. Wo landet der Punkt (a,b) nach dieser Spiegelung σ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.

(12) Geben Sie die Darstellungsmatrix für die Spiegelung an der Geraden $x-2\,y=0$ bezüglich der kanonischen Basis E an.

(13) Wo landet der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ nach der Drehung δ um $90°$ um die Gerade

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Drehung bezüglich der kanonischen Basis! Wir drehen dabei *gegen den Uhrzeigersinn*, wenn man von $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schaut.

(14) (Drehung um eine Gerade im Raum) Wo landet der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ nach der Drehung δ um $90°$ um die Gerade g, die durch

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben ist? Dabei drehen wir *gegen den Uhrzeigersinn*, wenn man von $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schaut. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Drehung bezüglich der kanonischen Basis!

ANHANG A

Programme und Unterlagen

1. Programme in frei verfügbaren Computeralgebrasystemen

`werden derzeit entwickelt`.

2. Programme in kommerziellen Systemen

2.1. Mathematica.

Mathematica ist ein von der Firma Wolfram Research (Champaign, Illinois) entwickeltes und verkauftes Computeralgebrasystem. Studierende der JKU können bei Interesse am Servicedesk des Informationsmanagements Studierendenlizenzen für Mathematica erwerben.

Die Mathematica-Files `GaussDemo6.m` (Mathematica 5) und `RowRed12.m` (Mathematica 7) enthalten Mathematica-Funktionen, die folgende Probleme mit Zwischenschritten vorrechnen:

- Lösen eines linearen Gleichungssystems (`Gauss[A,b]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonForm[A]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonNormalForm[A]`).
- Bestimmen der Determinante einer Matrix (`DeterminantenDemo[A]`).

Die Programme können von Mathematica aus mit `<< GaussDemo6.m` und `<< RowRed12.m` geladen werden.
Sie sind auf `http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/MathInf/vlws05/MathematicaProgramme/` erhältlich und werden den Studierenden ausschließlich für die Nutzung im Rahmen unserer Lehrveranstaltungen zur Verfügung gestellt.

3. Literatur

Es kann hilfreich sein, auch noch andere Unterlagen als das Vorlesungsskriptum zu kennen. Solche sind etwa (Kommentare dazu in der Vorlesung):

- Kiyek, Karl-Heinz und Schwarz, Friedrich, Lineare Algebra. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1999. [**Kiyek and Schwarz, 1999**]
- Peter Weiss, Lineare Algebra und analytische Geometrie, Rudolf Trauner Verlag, Linz, 1980. [**Weiß, 1980**]
- P. Halmos, Finite Dimensional Vector Spaces, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton-Toronto-New York-London, 1958. [**Halmos, 1958**]
- P. Halmos, Naive Mengenlehre, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1976. [**Halmos, 1976**]

Literaturverzeichnis

[Halmos, 1958] Halmos, P. R. (1958). *Finite-dimensional vector spaces*. The University Series in Undergraduate Mathematics. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton-Toronto-New York-London. 2nd ed.

[Halmos, 1976] Halmos, P. R. (1976). *Naive Mengenlehre*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. Vierte Auflage, Aus dem Englischen übersetzt von Manfred Armbrust und Fritz Ostermann, Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, No. 6.

[Kiyek and Schwarz, 1999] Kiyek, K.-H. and Schwarz, F. (1999). *Lineare Algebra*. Teubner Studienbücher Mathematik. [Teubner Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart.

[Remmert and Ullrich, 1987] Remmert, R. and Ullrich, P. (1987). *Elementare Zahlentheorie*. Birkhäuser Verlag, Basel.

[Weiß, 1980] Weiß, P. (1980). *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Rudolf Trauner, Linz. Eine anwendungsbezogene Einführung. [An application oriented introduction].