Institut für Algebra

Notizen zur Vorlesung

Überblick Mathematik III Nawi-Tec

Differential- und Integralrechnung

Sommersemester 2019

Erhard Aichinger

Version 27. Juni 2019

Adresse:

Assoc.-Prof. Dr. Erhard Aichinger
Institut für Algebra, Johannes Kepler Universität Linz
4040 Linz, Österreich
e-mail: erhard.aichinger@jku.at

Version 27.6.2019

Druck: Kopierstelle, Abteilung Service, Universität Linz

KAPITEL 1

Differentialrechnung

Diese Unterlagen sind bis jetzt nur ein Entwurf. Sie fassen die Inhalte der Vorlesung zusammen. An manchen Stellen fehlen noch die Graphiken, manche Inhalte sind nur grob formuliert oder technisch nicht ausgeführt, wie z.B. die Voraussetzung an eine Funktion, "hinreichend glatt" für eine Behauptung zu sein.

Themen der Vorlesung:

1. Ableitung

- Sei $s(t)$ die Position eines Objektes zum Zeitpunkt t.
- Die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t ist $\lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$.
- Mit $\lim_{h\to 0} v(h)$ meinen wir ein v, das folgende Bedingung erfüllt:

  Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $h \neq 0$ mit $-\delta < h < \delta$ gilt, dass $|v(h) - v| < \varepsilon$.

  Es gibt höchstens ein solches v.
- Wenn $\lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ existiert, so nennen wir ihn $s'(t)$. Die Funktion s' heißt *Ableitung von s*.
- Die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt t ist dann $s''(t)$.

2. Nutzen der Ableitung

Durch die Ableitung lassen sich viele Vorgänge modellieren:

- Freier Fall auf der Erdoberfläche: $s(0) = 0$, $s'(0) = 0$, $s''(t) = -g_n$, wobei $g_n \approx 9,80665\text{m}/\text{s}^2$ die 1901 festgelegte *Normalfallbeschleunigung* ist.
- Auslenkung einer Feder: $s(0) = 1$, $s'(0) = 0$, $s''(t) = -ks(t)$, k mit $k > 0$ ist die "Federkonstante".
- Exponentielles Wachstum: $s(0) = 1$, $s'(t) = \alpha s(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Planetenbahnen.

Diese Gleichungen, in denen als Lösungen *Funktionen* gesucht werden, heißen *Differentialgleichungen*. Viele kann man numerisch, manche symbolisch lösen.

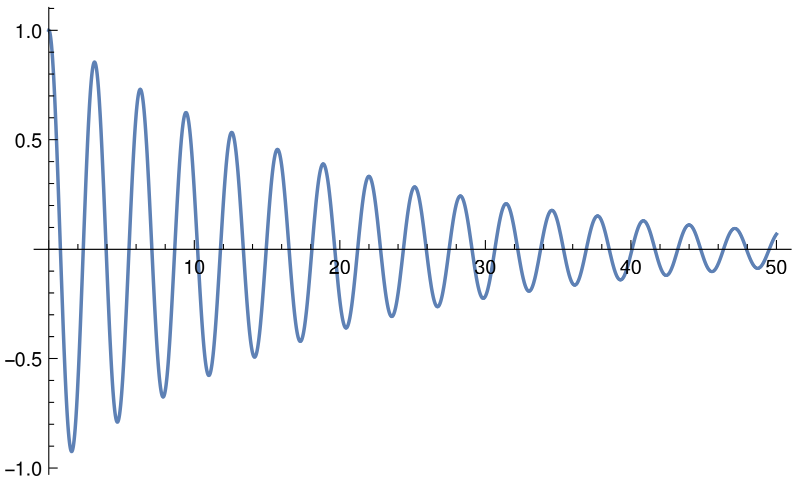
Differentialgleichungen zur Schwingung von Federn

In[112]:=
```
s = NDSolve[{x''[t] == -1/10 x'[t] - 4 x[t], x[0] == 1, x'[0] == 0}, x, {t, 0, 50}]
```

Out[112]=
```
{{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 50.}} Output: scalar ]}}
```

In[113]:=
```
Plot[x[t] /. s, {t, 0, 50}]
```

Out[113]=



In[114]:=
```
DSolve[{x''[t] == -1/10 x'[t] - 4 x[t], x[0] == 1, x'[0] == 0}, x, t]
```

Out[114]=

$$\left\{\left\{x \to \text{Function}\left[\{t\}, \frac{e^{-t/20}\left(1599\,\text{Cos}\left[\frac{\sqrt{1599}\,t}{20}\right] + \sqrt{1599}\,\text{Sin}\left[\frac{\sqrt{1599}\,t}{20}\right]\right)}{1599}\right]\right\}\right\}$$

In[115]:=
```
N[Sqrt[1599] / 20]
```

Out[115]=
```
1.99937
```

System mit 3 Federn

In[116]:=
```
d[p1_, p2_] := Sqrt[(p1 - p2).(p1 - p2)]
```

In[119]:=
```
R = {0, 0}; A = {-5, -3}; B = {5, -2};
CC = {0, 6};
```

In[123]:=
```
k1 = 1; k2 = 1; k3 = 1;
```

In[124]:=
```
p = k1 * ((d[A, {x[t], y[t]}] - d[A, R]) / d[A, {x[t], y[t]}]) * (A - {x[t], y[t]}) +
    k2 * ((d[B, {x[t], y[t]}] - d[B, R]) / d[B, {x[t], y[t]}]) * (B - {x[t], y[t]}) +
    k3 * ((d[CC, {x[t], y[t]}] - d[CC, R]) / d[CC, {x[t], y[t]}]) * (CC - {x[t], y[t]})
```

Out[124]=

$$\left\{\frac{(-5-x[t])\left(-\sqrt{34}+\sqrt{(-5-x[t])^2+(-3-y[t])^2}\right)}{\sqrt{(-5-x[t])^2+(-3-y[t])^2}}+\frac{(5-x[t])\left(-\sqrt{29}+\sqrt{(5-x[t])^2+(-2-y[t])^2}\right)}{\sqrt{(5-x[t])^2+(-2-y[t])^2}}-\frac{x[t]\left(-6+\sqrt{x[t]^2+(6-y[t])^2}\right)}{\sqrt{x[t]^2+(6-y[t])^2}},\right.$$

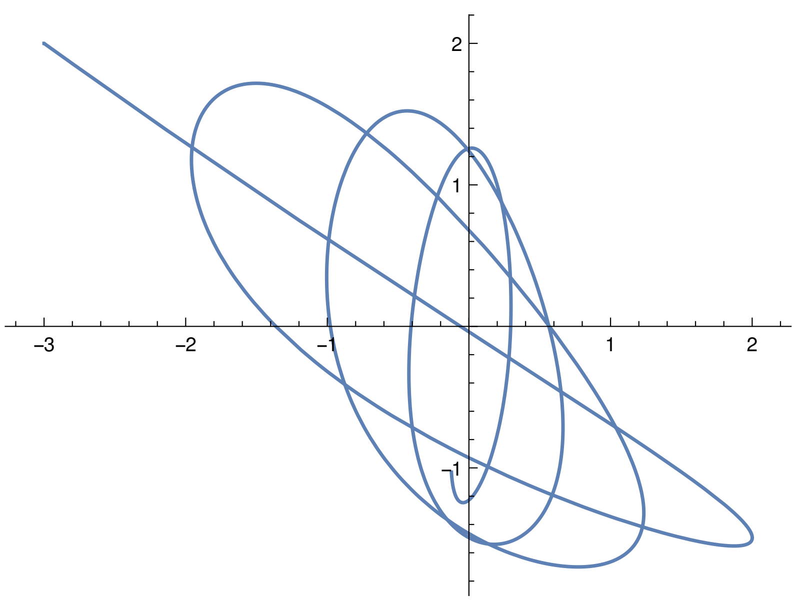
$$\left.\frac{\left(-\sqrt{34}+\sqrt{(-5-x[t])^2+(-3-y[t])^2}\right)(-3-y[t])}{\sqrt{(-5-x[t])^2+(-3-y[t])^2}}+\frac{\left(-\sqrt{29}+\sqrt{(5-x[t])^2+(-2-y[t])^2}\right)(-2-y[t])}{\sqrt{(5-x[t])^2+(-2-y[t])^2}}+\frac{\left(-6+\sqrt{x[t]^2+(6-y[t])^2}\right)(6-y[t])}{\sqrt{x[t]^2+(6-y[t])^2}}\right\}$$

In[165]:=
```
s = NDSolve[{p[[1]] - 0.1x'[t] == x''[t], p[[2]] - 0.1y'[t] == y''[t],
    x[0] == -3, y[0] == 2, x'[0] == 0, y'[0] == 0}, {x, y}, {t, 0, 200}]
```

Out[165]=
```
{{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 200.}} Output: scalar ],
  y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 200.}} Output: scalar ]}}
```

In[166]:=
```
ParametricPlot [{x[t], y[t]} /. s, {t, 0, 20}]
```

Out[166]=



3. Berechnen der Ableitung

Wenn die Funktion *symbolisch*, also aus aus $\sin(x), \cos(x), e^x, x^\alpha$ und den Grundrechnungsarten $+, -, \cdot$ zusammengesetzt ist, so kann man leicht die Ableitung bestimmen.

3.1. Elementare Funktionen.

- $f(x) = x^\alpha$. (Diese Funktion ist für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ auf ganz $\mathbb{R}$ und für $\alpha \in \mathbb{R}$ zumindest auf $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ definiert.) Dann gilt $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
- $f(x) = e^x$. Dann $f'(x) = e^x$.
- $f(x) = \sin(x)$. Dann $f'(x) = \cos(x)$.
- $f(x) = \cos(x)$. Dann $f'(x) = -\sin(x)$.

3.2. Ableitungsregeln.

- $h(x) = f(x) + g(x)$. Dann gilt $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $h(x) = \alpha f(x)$. Dann gilt $h'(x) = \alpha f'(x)$.
- $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Dann gilt $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. (Produktregel)
- $h(x) = f(g(x))$. Dann gilt $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. (Kettenregel)

KAPITEL 2

Differenzieren von Funktionen in mehreren Variablen

1. Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x \cdot \sin x \cdot \cos y. \end{aligned}$$

Wir wollen analysieren, wie „steil“ es im Punkt $P = (-1, -2)$ des Graphen in Richtung des Vektors $(0.5, 1.5)$ „bergauf“ geht. Hierfür definieren wir

$$g(t) = f\left(\begin{pmatrix} -1 + 0.5t \\ -2 + 1.5t \end{pmatrix}\right).$$

Diese Funktion beschreibt den Schnitt durch den Graphen entlang der Geraden

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

Die Steigung der Funktion f im Punkt $(-1, -2)$ in Richtung des Vektors $(0.5, 1.5)$ ist gerade die Steigung von g an der Stelle 0. Wir erhalten diese Steigung als

$$g'(0) = 1.43523.$$

Das ist die *Richtungsableitung* von f an der Stelle $(-1, -2)$ in Richtung $(0.5, 1.5)$ und wird geschrieben als

$$D_{\left(\begin{smallmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 1.43523.$$

2. Partielle Ableitungen

Definition 2.1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$D_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$$

die *partielle Ableitung* von f an der Stelle (x_0, y_0) nach x (in x-Richtung), und

$$D_{\binom{0}{1}} f(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})$$

jene nach y.

BEMERKUNG 2.2. Andere Schreibweisen:

$$D_{\binom{1}{0}} f(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = f_x(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})$$
$$D_{\binom{0}{1}} f(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = f_y(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})$$

BEMERKUNG 2.3. Bei der Berechnung der partiellen Ableitungen wird nach der gewünschten Variable abgeleitet, die übrigen Variablen werden als Konstante betrachtet.

BEISPIEL 2.4. $f(\binom{x}{y}) = x \cdot \sin x \cdot \cos y$

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(\binom{x}{y}) = \cos y \cdot (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x)$
(2) $\frac{\partial f}{\partial y}(\binom{x}{y}) = x \cdot \sin x \cdot (-\sin y)$.

DEFINITION 2.5. Der *Gradient* von f an der Stelle (x, y) ist definiert als

$$\text{grad } f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\binom{x}{y}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\binom{x}{y}) \end{pmatrix}.$$

3. Anwendungen

3.1. Richtungsableitung. Ist f „hinreichend glatt“, dann lässt sich die Richtungsableitung von f an der Stelle (x, y) in Richtung des Vektors v ausrechnen als

$$D_v f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \langle \text{grad } f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}), v \rangle.$$

3.2. Richtung des steilsten Anstiegs/Abfalls. Für eine hinreichend glatte Funktion gilt: der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs, der negative Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Abfalls.

3.3. Tangentialebene. Die Tangente an die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 ist gegeben durch

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Analog ist die Tangentialebene an die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle (x_0, y_0) gegeben durch

$$z = f(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})(y - y_0).$$

Beispiel 2.6. Tangentialebene an $f(\binom{x}{y}) = x \cdot \sin x \cdot \cos y$ im Punkt $\binom{-1}{-2}$:

$$z = -0.35 + 0.575(x + 1) + 0.765(y + 2).$$

3.4. Bestimmung der Maxima/Minima. Wenn eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ im Inneren ihres Definitionsbereiches einen Extremwert besitzt und an dieser Stelle differenzierbar ist, so ist ihr Gradient an dieser Stelle der Nullvektor. Punkte, an denen beide partiellen Ableitungen gleich 0 sind, müssen aber keine Extremwerte sein. Gilt (hinreichende Glattheit vorausgesetzt) jedoch

$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) > 0,$$

so hat f an der Stelle (x_0, y_0) ein lokales Minimum. Gilt

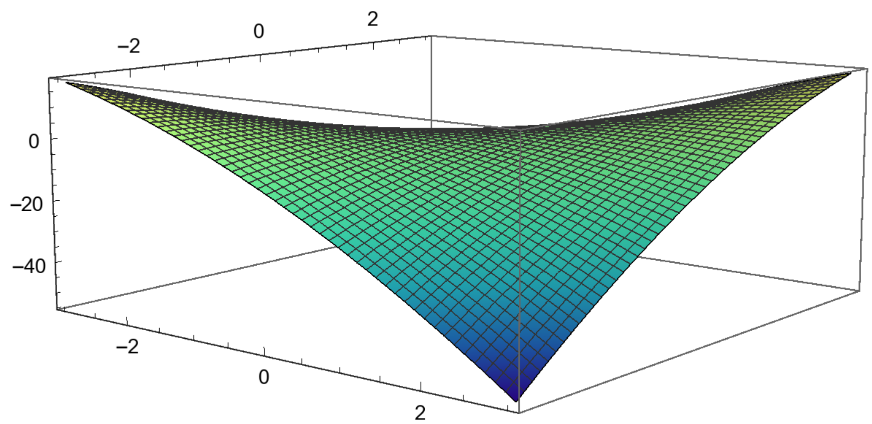
$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \text{ und } f_{xx}(x_0, y_0) < 0,$$

so hat f an der Stelle (x_0, y_0) ein lokales Maximum.

Die Funktion $f(x, y) = -x^2 + 4xy - y^2$ hat die interessante Eigenschaft, dass ihr Schnitt entlang der x-Achse durch $(0, 0)$ ein Maximum hat. Ebenso hat ihr Schnitt entlang der y-Achse durch $(0, 0)$ ein Maximum. Trotzdem hat f in $(0, 0)$ kein lokales Maximum.

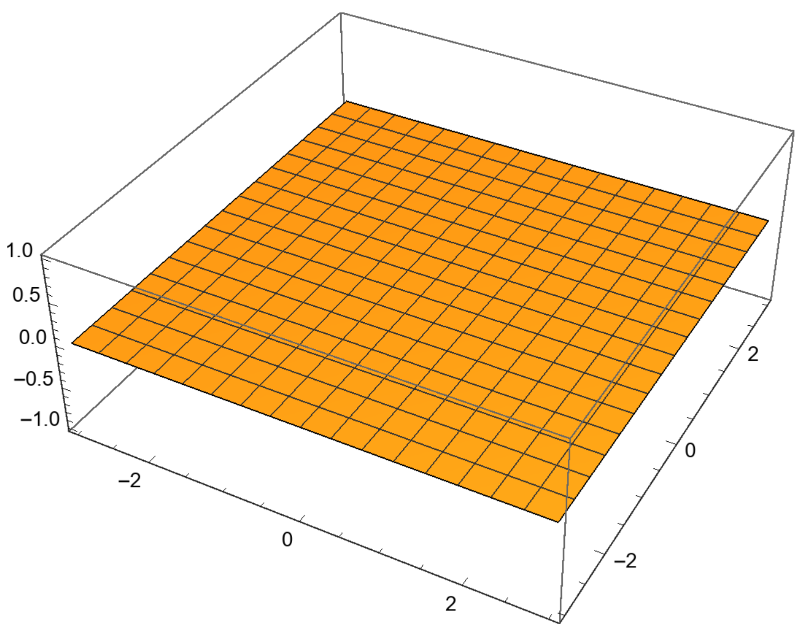
In[107]:=
```
f = -x^2 + 4 x y - y^2
```
Out[107]= $-x^2 + 4\,x\,y - y^2$

In[108]:=
```
g1 = Plot3D[f, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, ColorFunction → "BlueGreenYellow",
  Mesh → 50]
```
Out[108]=



In[109]:=

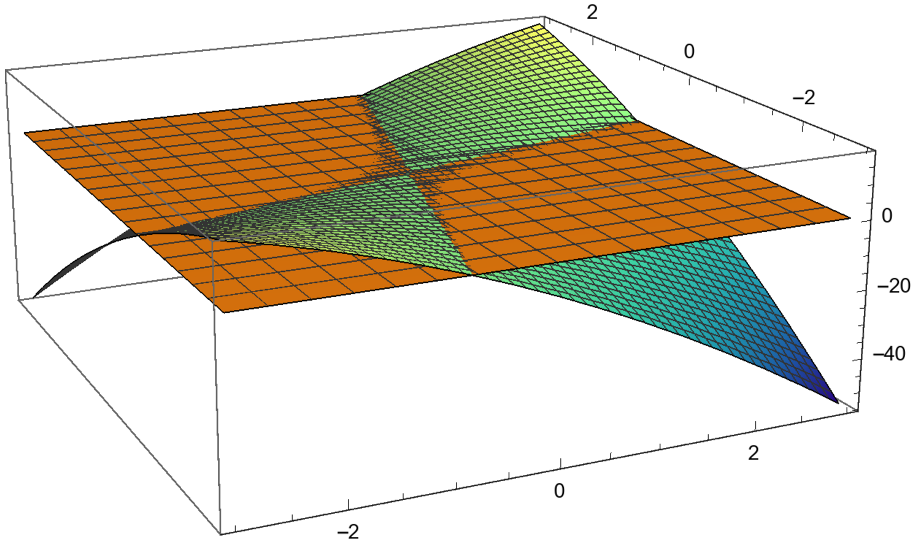
In[110]:=
```
g2 = Plot3D[ 0, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```
Out[110]=



In[111]:=

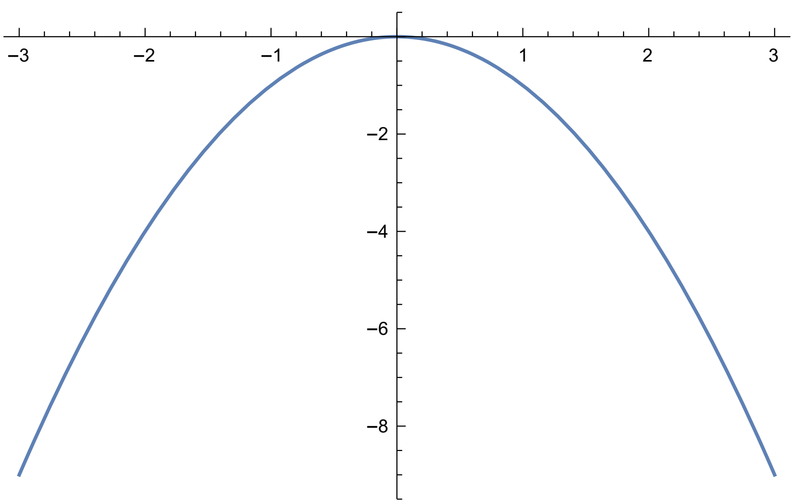
```
Show[{g1, g2}]
```

Out[111]=



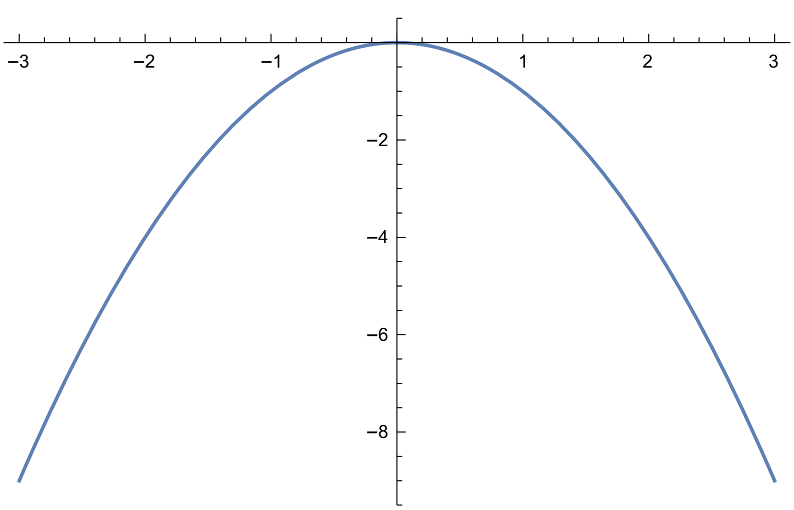
In[112]:=
```
Plot[f /. {x → t * 1, y → t * 0}, {t, -3, 3}]
```

Out[112]=



In[113]:=
```
Plot[f /. {x → t * 0, y → t * 1}, {t, -3, 3}]
```

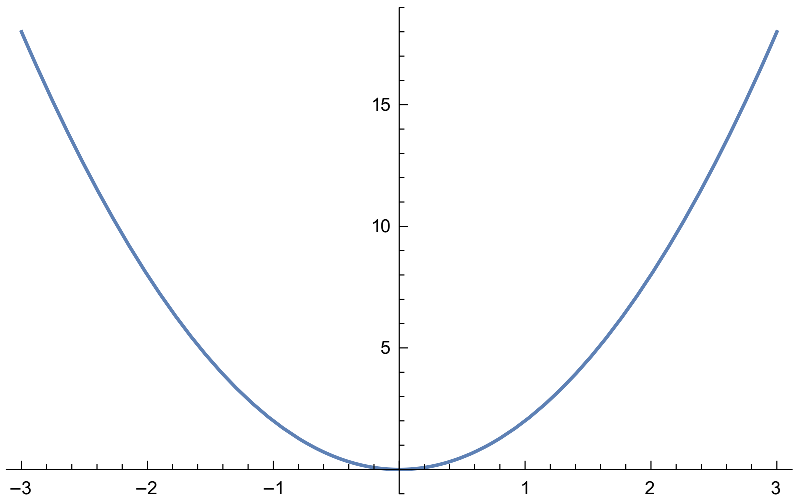
Out[113]=



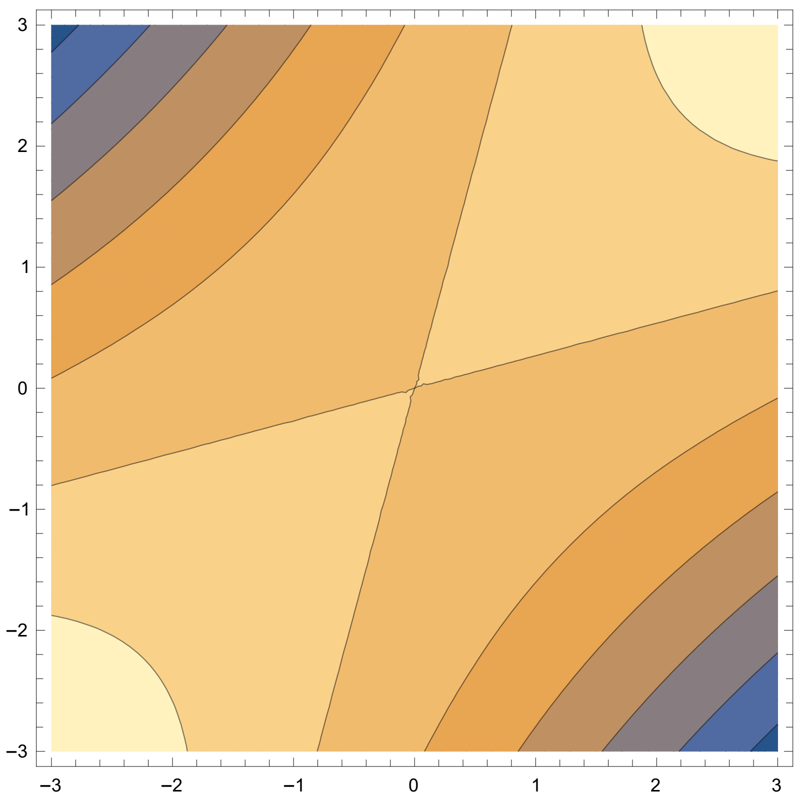
```
In[116]:= Plot[f /. {x → t * 1, y → t * 1}, {t, -3, 3}]

          ContourPlot[f, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

Out[116]=



Out[117]=



```
In[118]:= fx = D[f, x]
```

Out[118]= $-2x+4y$

```
In[119]:= fxx = D[fx, x]
```

Out[119]= -2

```
In[120]:= fy = D[f, y]
```

Out[120]= $4x-2y$

In[121]:= **fyy = D[fy, y]**

Out[121]= -2

In[123]:= **fxy = D[fx, y]**

Out[123]= 4

In[124]:= **fyx = D[fy, x]**

Out[124]= 4

In[126]:= **fxx * fyy - fxy ^2**

Out[126]= -12

In[125]:= **f**

Out[125]= $-x^2 + 4\,x\,y - y^2$

Beispiel 2.7. Sei $f(\binom{x}{y}) = 34 - 22x + 5x^2 - 16y + 6xy + 2y^2$. Gesucht sind die Extremwerte von f. Weiters ist zu bestimmen, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

Lösung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= -22 + 10x + 6y = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= -16 + 6x + 4y = 0 \\
10x + 6y &= 22 \mid \cdot 2 \\
6x + 4y &= 16 \mid \cdot(-3) \\
\\
2x &= -4 \\
x &= -2 \\
y &= 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{xx}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 10, f_{yy}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 4, f_{xy}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} &= 6 \\
10 \cdot 4 - 36 &> 0 \\
10 &> 0
\end{aligned}$$

Somit ist der Punkt $(-2, 7)$ ein Minimum.

3.5. Das Newtonverfahren. Das Newtonverfahren ist ein iteratives Verfahren zum Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme der Form $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$. Wir starten in einem Punkt (x_0, y_0) und errechnen uns daraus den nächsten Punkt (x_1, y_1) in folgender Weise: Seien t_1, t_2 die Tangentialebenen an f_1, f_2 im Punkt (x_0, y_0). Wir bestimmen (x_1, y_1) als Lösung von $t_1(x,y) = t_2(x,y) = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\binom{x_1}{y_1} = \binom{x_0}{y_0} - (J_{f_1,f_2}(x_0,y_0))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_0,y_0) \\ f_2(x_0,y_0) \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ f_2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Matrix J_{f_1,f_2} nennt man *Jacobi-Matrix*.

KAPITEL 3

Integralrechnung

1. Definition des Integrals

Gegeben sei eine Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$.

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[a, b]$. Wir unterteilen $[a, b]$ in m gleich lange Teile und bezeichnen die Teilungspunkte mit

$$x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \cdots, x_m^{(m)},$$

sodass:

$$\begin{aligned} x_0^{(m)} &= a, \\ x_m^{(m)} &= b, \\ x_i^{(m)} &= a + \frac{i}{m} \cdot (b-a). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $I_i^{(m)}$ das i-te Teilungsintervall bei der Teilung von $[a, b]$ in

m Teile.

$$I_i^{(m)} = [x_{i-1}^{(m)}, x_i^{(m)}].$$

Wir bezeichnen mit R_k die Fläche des *größten* Rechtecks, das im k-ten Teilintervall *unterhalb* der Funktion eingezeichnet werden kann. Dann ist

$$R_k = \frac{b-a}{m} \cdot \min\{f(x) \mid x \in I_k(m)\}.$$

Weiters bezeichnen wir mit S_k die Fläche des *kleinsten* Rechtecks, das im k-ten Teilintervall *oberhalb* der Funktion eingezeichnet werden kann. Dann ist

$$S_k = \frac{b-a}{m} \cdot \min\{f(x) \mid x \in I_k(m)\}.$$

Die m-te *Untersumme* $U^{(m)}$ ist die Summe der Rechtecksflächen $R_1, R_2, \cdots, R_m$, also

$$U^{(m)}(f) = \sum_{k=1}^{m} R_k.$$

Analog ist die m-te *Obersumme* $O^{(m)}$ die Summe der Rechtecksflächen $S_1, S_2, \cdots, S_m$, also

$$O^{(m)}(f) = \sum_{k=1}^{m} S_k.$$

Definition 3.1 (Darboux-Integral). Wenn beide Grenzwerte $\lim_{m\to\infty} U^{(m)}(f)$ und $\lim_{m\to\infty} O^{(m)}(f)$ *existieren* und *gleich* sind, dann heißt f *integrierbar* im Bereich $[a, b]$, und wir schreiben

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{m\to\infty} U^{(m)}(f).$$

Beispiel 3.2. Wir integrieren $f(x) = x$ zwischen 0 und 3 mit Hilfe der Ober- und Untersummen.

$$\begin{aligned} x_0^{(m)} &= 0, \\ x_m^{(m)} &= 3, \\ x_k^{(m)} &= \frac{3}{m} \cdot k. \end{aligned}$$

Die k-te Rechtecksfläche erhalten wir als

$$R_k = \frac{3}{m} \cdot f(x_{k-1}^{(m)}),$$

wobei $\frac{3}{m}$ die Breite des Intervalls und $x_{k-1}^{(m)}$ der kleinste Funktionswert in $[x_{k-1}^{(m)}, x_k^{(m)}]$ ist.

$$\begin{aligned} R_k = \frac{3}{m} \cdot f\left(\frac{k-1}{m} \cdot 3\right) &\overset{f(x)=x}{=} \frac{3}{m} \cdot \frac{k-1}{m} \cdot 3 \\ &= \frac{9}{m^2} \cdot (k-1). \end{aligned}$$

Die m-te Untersumme erhalten wir durch Addieren der m Rechtecksflächen:

$$\begin{aligned} U^{(m)}(f) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{9}{m^2} \cdot (k-1) \\ &= \frac{9}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \cdot (k-1) \end{aligned}$$

und mit der *Gaußschen Formel*

$$\sum_{j=1}^{n} j = n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$

gilt:

$$\begin{aligned} U^{(m)}(f) &= \frac{9}{m^2} \cdot m \cdot (m-1) \frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2} \cdot \frac{(m-1)}{m} \\ &= \frac{9}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \\ \lim_{m\to\infty} U^{(m)}(f) &= \lim_{m\to\infty} \frac{9}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Die m-te Obersumme ergibt sich als

$$O^{(m)}(f) = \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\lim_{m\to\infty} O^{(m)}(f) = \frac{9}{2}.$$

Da $\lim_{m\to\infty} U^{(m)}(f) = \lim_{m\to\infty} O^{(m)}(f)$, ist $f(x) = x$ in $[0,3]$ integrierbar und es gilt:

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}.$$

2. Numerische Berechnung von Integralen

Im vorigen Abschnitt haben wir die Fläche unterhalb der Funktion in Rechtecke unterteilt. Nun unterteilen wir $[a,b]$ ebenfalls in m Teilintervalle, nähern aber die Fläche durch Trapeze an.

Die Fläche des k-ten Trapezes ergibt sich als

$$T_k = \frac{f\left(x_k^{(m)}\right) + f\left(x_{k-1}^{(m)}\right)}{2} \cdot \frac{b-a}{m}.$$

Die Näherung für das Integral ist dann

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{m} T_k.$$

Beispiel 3.3. Berechne $\int_0^\pi \sin(x)dx$ mit der Trapezregel.

Lösung

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = 0.45345 \\
T_2 &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{3}) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} = 0.9069 \\
T_3 &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin\left(\pi\right)}{2} = 0.45345 \\
T_1 + T_2 + T_3 &= 1.8138
\end{aligned}$$

Der folgende Satz gibt an, wie groß der Fehler beim Integrieren mit der Trapezregel maximal sein kann.

SATZ 3.4 (ohne Beweis). *Sei f zweimal differenzierbar, sei f'' stetig, sei $M \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt: $|f''(x)| \leq M$. Dann gilt für e, den Fehler beim Integrieren mit der Trapezregel mit m Teilintervallen, folgende Abschätzung:*

$$|e| \leq \frac{M \cdot (b-a)^3}{12m^2}.$$

BEISPIEL 3.5. Fehler beim Integrieren von $\int_0^\pi \sin(x)dx$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) \\
f'(x) &= \cos(x) \\
f''(x) &= -\sin(x)
\end{aligned}$$

$$M = 1, |e| \leq \frac{1 \cdot \pi^3}{12 \cdot 3^2} = 0.287095$$

Daher gilt:

$$\int_0^\pi \sin(x)\ dx \in [1.8138 - 0.2871; 1.8138 + 0.2871].$$

3. Symbolische Berechnung von Integralen

$$f(x) = c$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b c\ dx = c \cdot (b-a)$$

$$f(x) = x$$
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b x\ dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Für eine allgemeine Funktion f gilt:

$$F(a) = \int_0^a f(x)\ dx$$
$$F(a+h) = \int_0^{a+h} f(x)\ dx$$

Somit gilt für ein beliebiges Intervall $[a, a+h]$:

$$F(a+h) - F(a) = \int_a^{a+h} f(x)\ dx$$

Wir betrachten wieder die Rechtecke R_k, S_k aus 1.

$$\int_a^{a+h} f(x)dx \leq h \cdot \max\{f(\xi) \mid \xi \in [a, a+h]\}$$

$$\int_a^{a+h} f(x)dx \geq h \cdot \min\{f(\xi) \mid \xi \in [a, a+h]\}$$

$$h \cdot \min\{f(\xi) \mid \xi \in [a, a+h]\} \leq F(a+h) - F(a) \leq h \cdot \max\{f(\xi) \mid \xi \in [a, a+h]\}$$

$$\min\{f(\xi) \mid \xi \in [a, a+h]\} \leq \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \leq \max\{f(\xi) \mid \xi \in [a, a+h]\}$$

Wenn wir nun von allen drei Ausdrücken den Limes für h gegen 0 betrachten, und annehmen, dass f in a stetig ist, so gilt:

$$f(a) \leq F'(a) \leq f(a)$$

Dies ist die Motivation für folgenden wichtigen Satz:

Satz 3.6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ stetig und sei $F(y) := \int_0^y f(t)dt$, dann gilt für alle $y > 0$: $F'(y) = f(y)$.*

Meistens verwenden wir folgende Version:

Satz 3.7. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir nehmen an, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:*

$$F'(x) = f(x).$$

Dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Wenn f gegeben ist, so finden wir eine solche Funktion F also dadurch, dass wir eine Funktion mit $F' = f$ bestimmen. Wir schreiben:

$$F = \int f(x)dx$$

und bezeichnen F als die *Stammfunktion* von f. Sie ist nur bis auf Addition einer Konstanten bestimmt.
Der Hauptsatz reduziert also das Problem der Flächenberechnung auf das Umkehren des Differenzierens.

Beispiel 3.8.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) \\ F(x) &= \sin(2x) \cdot \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad F'(x) = \cos(2x) \\ F(x) &= \sin(2x) \cdot \frac{1}{2} + 3 \quad \longrightarrow \quad F'(x) = \cos(2x) \end{aligned}$$

Wie das letzte Beispiel zeigt, gibt es mehrere Stammfunktionen, diese unterscheiden sich aber höchstens durch eine additive Konstante.

3.1. Stammfunktionen elementarer Funktionen.

$$\begin{aligned} f(x) &= c \\ F(x) &= c \cdot x \\ \\ f(x) &= x^\alpha \text{ für } x \neq -1 \\ F(x) &= \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} \\ \\ f(x) &= x^{-1} \\ F(x) &= \ln(x) \\ \\ f(x) &= e^x \\ F(x) &= e^x \\ \\ f(x) &= \sin(x) \\ F(x) &= -\cos(x) \\ \\ f(x) &= \cos(x) \\ F(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

4. Stammfunktion zusammengesetzter Funktionen

(1) Summe zweier Funktionen

$$\int f + g\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx.$$

(2) Partielle Integration von Produkt zweier Funktionen

$$\begin{aligned} (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ f \cdot g &= \int f' \cdot g + \int f \cdot g' \\ f \cdot g - \int f \cdot g' &= \int f' \cdot g \end{aligned}$$

Also gilt $\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$.

(3) Integration impliziter Funktionen

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$
$$f(g) = \int f'(g) \cdot g'$$

AUFGABEN 3.9.

(1) ■

$$\int (x^2 + 3x)dx = \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

■

$$\begin{aligned} \int_2^4 (x^2 + 3x)dx &= \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=2}^{x=4} \\ &= \frac{4^3}{3} + 3 \cdot \frac{4^2}{2} - \frac{2^3}{3} - 3 \cdot \frac{2^2}{2} \\ &= 36\,\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(2) ■

$$\int x \cdot \sin(x) dx$$

$$\begin{aligned} f' &:= \sin(x) \\ f &= -\cos(x) \\ \\ g &:= x \\ g' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int f' \cdot g \, dx &= -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1 \, dx \\ &= -\cos(x) \cdot x + \sin(x) \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \underbrace{\ln(x)}_{g} \cdot \underbrace{1}_{f'} \, dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 \, dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x \end{aligned}$$

(3) ■

$$\int e^{x^2} \cdot x \, dx$$

Lösung durch Substitution:

$$\begin{aligned} u &:= x^2 \\ u' = \frac{du}{dx} &= 2x \\ dx &= \frac{du}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{x^2} \cdot x\,dx &= \int e^u \cdot x \cdot \frac{du}{2x} \\ &= \int e^u \cdot \frac{1}{2} \cdot du \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^u \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{x^2}. \end{aligned}$$

■

$$\int \ln(2+\sin(x)) \cdot \cos(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} u &= 2+\sin(x) \\ \frac{du}{dx} &= \cos(x) \\ dx &= \frac{du}{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(2+\sin(x)) \cdot \cos(x)\,dx &= \int \ln(u) \cdot \cos(x) \cdot \frac{du}{\cos(x)} \\ &= \int \ln(u) du \\ &= u \cdot \ln(u) - u \\ &= (2+\sin(x)) \cdot \ln(2+\sin(x)) - 2 - \sin(x). \end{aligned}$$

5. Volumsberechnungen mit Integralen

Beispiel 3.10. $f(x) = x^2 - 4$

Wie groß ist das Volumen des durch die Rotation beschriebenen „Rugby-Balles“?

Lösung Die Nullstellen der Funktion sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Bei der Rotation beschreibt jeder Punkt $x \in [-2, 2]$ eine Kreislinie. Der Kreis hat den Flächeninhalt

$$(f(x))^2 \cdot \pi.$$

Das Volumen des Gesamtkörpers ist dann

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{+2} (f(x))^2 \cdot \pi \, dx \\ &= \int_{-2}^{+2} (x^2 - 4)^2 \cdot \pi \, dx \\ &= 107,233 \end{aligned}$$

Beispiel 3.11. Gesucht ist das Volumen einer Kugel mit Radius R. Die Lösung soll mittels Integralrechnung ermittelt werden.

Lösung Ein rotierender Punkt x beschreibt eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{R^2 - x^2}$. Somit ist das Gesamtvolumen

$$V = \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{4R^3\pi}{3}$$

Beispiel 3.12. $y = f(x) = x^2 + 1$.
Welches Volumen beschreibt diese Fläche, wenn sie um die y-Achse rotiert?

Lösung
$x = \sqrt{y - 1}$

Volumen eines Scheibchens $= (x(y))^2 \cdot \pi = (y-1) \cdot \pi$ in der Höhe y.

$$V = \int_1^{10} (y-1) \cdot \pi dy = 127.235$$

KAPITEL 4

Fourier-Analyse

1. Harmonische Schwingung

Wir befestigen ein Gewicht (1 kg) an einer Feder und beobachten seine Auslenkung an einer Skala.

Zum Zeitpunkt t zeigt der Zeiger auf $h(t)$. Zum Zeitpunkt 0 haben wir $h(0) = 1$. Wir bezeichnen:

$h(t)$	Auslenkung zum Zeitpunkt t
$h'(t)$	die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t
$h''(t)$	Beschleunigung zum Zeitpunkt t

Über die Funktion h wissen wir:
$h'(0) = 0$
$h''(t) = c \cdot (-h(t))$

Wir suchen also eine Funktion h, die folgende Kriterien erfüllt:

(1) $h''(t) = -c \cdot h(t)$ für alle $t \in [0, \infty]$

(2) $h(0) = 1$

(3) $h'(0) = 0$

Wir nennen 1. - 3. eine *Differentialgleichung* mit Anfangswerten.
Wir lösen mit Mathematica:

```
DSolve[{h''[t]==-c*h[t],h[0]==1,h'[0]==0},h[t],t]
```

und erhalten: $h(t) = \cos(\sqrt{c} \cdot t)$.

Wir betrachten folgende Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$:

(1) $h(t) = \cos(1 \cdot t \cdot 2\pi)$

(2) $h(t) = \sin(2 \cdot t \cdot 2\pi)$

(3) $h(t) = \sin(3 \cdot t \cdot 2\pi)$

Wir „hören“3 Hz.

Wenn eine Saite mit $h(t) = \sin(440 \cdot t \cdot 2\pi)$ schwingt, hören wir einen Ton von 440 Hz.

2. Darstellung einer Schwingung

Variante 1: Musiknoten
Variante 2: $s(t) = \alpha \cdot \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t) + \beta \cdot \sin(554.365 \cdot 2\pi \cdot t)$
(α, β) geben die Lautstärke an)
Variante 3: Oberfläche einer Schallplatte
Variante 4: Wir merken uns den Funktionswert (also die Position der Mikrofonmembran) nur an endlich vielen Stellen. Wir wählen also eine endliche Probe, die *samples*. Dabei muss man mindestens mit der doppelten der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz abtasten. Für Musik wäre also die Abtastfrequenz 40000 Hz.(CD: 44.1 kHz) Wir lassen an jedem der sample points nur endlich viele Funktionswerte zu, z.B. 256 verschiedene ($\triangleq$ 8 bit). Der DA-Wandler macht aus Zahlenfolgen ein Tonsignal.

3. Darstellung einer Schwingung als Summe von Sinus- und Cosinus-Schwingungen

Wir hören $f(t) = \sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(554.365 \cdot 2\pi t)$. Wie können wir die einzelnen Frequenzen herausfiltern?
Wir starten mit $f(t) = 5\sin(2 \cdot 2\pi t) + 7\cos(3 \cdot 2\pi t)$.
Für

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \sqrt{2} \cdot \sin(n \cdot 2\pi x) \quad (n \in \mathbb{N}) \\ c_n(x) &:= \sqrt{2} \cdot \cos(n \cdot 2\pi x) \quad (n \in \mathbb{N}) \\ c_0(x) &:= 1 \end{aligned}$$

gilt:

(1) $\int_0^1 s_n(x) \cdot s_m(x) dx = 0$ für $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$
(2) $\int_0^1 s_n(x) \cdot c_m(x) dx = 0$ für $m, n \in \mathbb{N}$
(3) $\int_0^1 c_n(x) \cdot c_m(x) dx = 0$ für $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$
(4) $\int_0^1 s_n(x) \cdot s_n(x) dx = 1$ für $n \in \mathbb{N}$
(5) $\int_0^1 c_n(x) \cdot c_n(x) dx = 1$ für $n \in \mathbb{N}$

Für $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &:= \int_0^1 f(x)g(x)\ dx \quad \text{und} \\ ||f|| &:= \sqrt{\langle f, f \rangle} \end{aligned}$$

Bezüglich des Skalarprodukts $\langle , \rangle$ (und der Norm $||.||$) bildet

$$B = \{c_i | i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{s_j | j \in \mathbb{N}\}$$

eine Orthonormalbasis von $L(B)$, denn für $f, g \in B$ gilt:

$$\langle f, g \rangle = \begin{cases} 1, \text{ falls } f = g \\ 0, \text{ falls } f \neq g \end{cases}$$

Beispiel 4.1. Sei $f(t) = 5\sin(2 \cdot 2\pi t) + 7\sin(3 \cdot 2\pi t)$.

Dann ist

$\frac{5}{\sqrt{2}}$ die $\sqrt{2}\sin(2 \cdot 2\pi t)$-Koordinate und
$\frac{7}{\sqrt{2}}$ die $\sqrt{2}\cos(3 \cdot 2\pi t)$-Koordinate von f bzgl. der Basis B,
alle anderen Koordinaten sind Null.

Gesucht ist eine allgemeine Methode, die Koordinaten einer Funktion f bezüglich B zu finden.

Im Fall einer Orthonormalbasis braucht man aber nur die Skalarprodukte von f mit den Basisvektoren zu berechnen, um die Koordinaten bzgl. der Basis zu erhalten.

Wenn also f nur aus ganzzahligen Frequenzen zusammengesetzt ist, so gilt:

$$f \quad = \quad \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot c_i + \sum_{j=0}^{N} b_j \cdot s_j,$$

wobei

$$a_i = \langle f, c_i \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(i \cdot 2\pi x) dx \tag{4.1}$$

$$b_j = \langle f, s_j \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(j \cdot 2\pi x) dx \tag{4.2}$$

Definition 4.2. Wir bezeichnen a_i aus (4.2) und b_j aus (4.2) als *diskrete trigonometrische Fourierkoeffizienten* von f. Sie geben an, wie stark die Schwingungen $\cos(i \cdot 2\pi t)$ und $\sin(j \cdot 2\pi t)$ in f vertreten sind.

Beispiel 4.3. Sei $f(t) = 5\sin(2 \cdot 2\pi t) + 7\sin(3 \cdot 2\pi t)$.
Gesucht sind a_1, a_3, a_2, b_2.

Lösung

a1=Integrate[f*cos(1*2πt)*$\sqrt{2}$,{t,0,1}]=0
a3=Integrate[f*cos(3*2πt)*$\sqrt{2}$,{t,0,1}]=$\frac{7}{\sqrt{2}}$
a2=Integrate[f*cos(2*2πt)*$\sqrt{2}$,{t,0,1}]=0
b2=Integrate[f*sin(2*2πt)*$\sqrt{2}$,{t,0,1}]=$\frac{5}{\sqrt{2}}$

4. Diskrete Fouriertransformation in $\mathbb{C}$

Wir wissen:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \cdot \sin x \\ e^{-ix} &= \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) = \cos x - i \cdot \sin x \end{aligned}$$

Somit

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Für das Integral einer komplexwertigen Funktion in einem reellen Intervall gilt:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re\, f(t)dt + i \cdot \int_a^b Im\, f(t)dt$$

Beispiel 4.4. Löse $\int_0^1 (x+i)^2 \mathrm{dx}$

Lösung

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+i)^2 &= \int_0^1 x^2+2ix-1\,dx\\ &= \int_0^1 x^2-1\,dx + i\int_0^1 2x\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-x|_0^1 + i\cdot x^2|_0^1\\ &= -\frac{2}{3}+i\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+i)^2 &= \frac{(x+i)^3}{3}|_0^1\\ &= \frac{(1+i)^3}{3}-\frac{i^3}{3}\\ &= -\frac{2}{3}+i\end{aligned}$$

Nun nehmen wir anstelle von $\sin(n2\pi t)$ und $\cos(n\pi t)$ (mit $n\in\mathbb{N}$) die Funktionen $e^{ik2\pi t}$ (mit $k\in\mathbb{Z}$) und definieren

$$u_k(t)=e^{k\cdot 2\pi it}.$$

Mit dieser Schreibweise gilt: die lineare Hülle von $u_{-n},u_{-n+1},\cdots,u_0,u_1,\cdots u_n$ ist gleich der linearen Hülle von $c_0,c_1,\cdots,c_n,s_1,s_n$. Das folgende Beispiele zeigt, warum das so ist.

Beispiel 4.5.

$$\begin{aligned}c_k(t) &= \sqrt{2}\cos(k\cdot 2\pi t)\\ &= \sqrt{2}\frac{1}{2}(e^{ik2\pi t}+e^{-ik2\pi t})\\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(u_k+u^{-k})\\ u_k(t) &= e^{ik2\pi t}\\ &= \cos(k2\pi t)+i\sin(k2\pi t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\underbrace{\cos(k2\pi t)}_{c_k}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\underbrace{\sin(k2\pi t)}_{s_k}\end{aligned}$$

Nun ist $u_{-n}, u_{-n+1}, \cdots, u_0, u_1, \cdots u_n$ eine ONB mit dem Skalarprodukt:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t) \cdot \overline{g(t)} dt.$$

Also gilt:

$$\langle u_j, u_k\rangle = \begin{cases} 1 \text{ für } j = k \\ 0 \text{ für } j \neq k \end{cases}$$

Bemerkung 4.6. Wenn wir f darstellen wollen als

$$f(t) = \sum_{j=-n}^{n} d_j u_j(t),$$

dann berechnen wir d_j mit

$$\begin{aligned} d_j &= \langle f, u_j\rangle \\ &= \int_0^1 f(t) \cdot \overline{u_j(t)} dt \\ &= \int_0^1 f(t) \cdot e^{-j2\pi it} dt. \end{aligned}$$

5. Fourierkoeffizienten eines gesampelten Signals

Sei $l = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$ eine Liste der Funktionswerte von f an den Stellen $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$, also $l_k = f(\frac{k-1}{n})$.
Wir wissen: $d_j = \int_0^1 f(t) \cdot \overline{u_j(t)} dt$.
Wir berechnen die Fourierkoeffizienten $(d_0, d_{-1}, \cdots, d_{-n+1})$ und bezeichnen diese Liste als $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$.

$$\begin{aligned} t_j &= d_{-j+1} \\ &= \langle f, u_{-j+1}\rangle \\ &= \int_0^1 f(t) u_{-j+1}(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) \cdot \overline{e^{(-j+1)2\pi it}} dt \\ &\simeq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) \cdot e^{-(-j+1)\cdot 2\pi i \frac{k-1}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot l_k \cdot e^{2\pi i\left(\frac{(k-1)(j-1)}{n}\right)} \end{aligned}$$

Für ein reelles Signal gilt: $d_j = \overline{d_{-j}}$. Daher reicht es, $d_0, d_{-1}, \cdots, d_{-n}$ auszurechnen, um $d_0, d_1, \cdots, d_n$ zu kennen.

Definition 4.7. Die *diskrete Fouriertransformation* (DFT) der Liste $l = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$ ist definiert als

$$(t_1, t_2, \cdots, t_n),$$

wobei

$$t_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot l_k \cdot e^{2\pi i\left(\frac{(k-1)(j-1)}{n}\right)}$$

6. Rücktransformation = inverse Fouriertransformation

Das Signal erhalten wir aus den Koeffizienten d_j einfach aus der Darstellung

$$f(t) = \sum_{j=-n}^{n} d_j \cdot u_j(t).$$

Seien nun nur die Koeffizienten $d_0, d_{-1}, \cdots, d_{-n+1}$ bekannt. Aus diesen wollen wir f rekonstruieren.

$$t_j := d_{-j+1}$$
$$l_k := f\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} l_k &= \sum_{j=1}^{n} d_{-j+1} \cdot u_{-j+1}\left(\frac{k-1}{n}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} t_j \cdot u_{-j+1}\left(\frac{k-1}{n}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} t_j \cdot e^{2\pi i\left(\frac{(k-1)(j-1)}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Definition 4.8. Diese Berechnung der l_k bezeichnen wir als *inverse Fouriertransformation.*